Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata

wiederhergestellt von Robert Simson

und

die angehängten Bücher des letzteren

nach dem Lateinischen frei bearbeitet

von

Dr. W. A. Diesterweg,

ordentlichem Professor der Mathematik an der königl.-preuss. Rheinuniversität.

Mit 10 Steintafeln.

Mainz,

bei Florian Kupferberg.

1822.

Den Herrn Professoren

von Pfleiderer in Tübingen,

von Bohnenberger in Tübingen,

Hauff in Gent,

Wisseler in Herborn,

seinen verehrtesten Lehrern,

in lebhafter Dankbarkeit gewidmet

vom Verfasser.

Vorrede.

Ueber den Werth des Studiums der Schriften der griechischen Geometer ist von alten Zeiten her nur Eine Stimme gewesen.

Unter ihnen hiefs Apollonius von Perga der grofse Geometer. Dafs er diesen Nahmen verdiente, davon zeugen seine auf uns gekommenen Schriften. Leider sind mehrere der von ihm verfafsten verlohren gegangen. Zu letzteren gehört eine merkwürdige Schrift περὶ διωρισμένης τόμης, *de sectione determinata*, von welcher Pappus in seinen *collectionibus mathematicis* Nachricht giebt. Sie beschäftigte sich mit der Bestimmung von Punkten in einer geraden Linie, in welcher andere Punkte gegeben sind, so dafs die Quadrate, oder Rechtecke aus den durch die gesuchten und die gegebenen Punkte bestimmten Segmenten, oder aus gegebenen geraden Linien und diesen Segmenten zu den Quadraten, oder Rechtecken aus den übrigen Segmenten gegebene Verhältnisse haben.

Die Nachrichten des Pappus über den Inhalt jener Schrift und die Behandlung dieser Aufgabe in derselben erweckten das Interesse mehrerer Mathematiker. Snellius, Ghetaldus, Giannini versuchten es, eine Wiederherstellung zu liefern. Ihre Arbeiten befriedigen den nicht, welcher mit der griechischen Geometrie vertraut ist. Dagegen lieferte Robert Simson, Professor der Mathematik in Glasgow, eine Wiederherstellung, welche alles übertrifft, was in dieser Art von Divination sich erwarten läfst. Die von Pappus angeführten Hülfssätze sind darin so benutzt, und die Schrift ist so sehr in dem Geiste des Apollonius abgefafst, dafs das Original kaum davon verschieden gewesen seyn kann. Simson fügte noch zwey Bücher über verwandte schwerere Aufgaben hinzu.

Da mich eine mehr als zwölfjährige Erfahrung über den wichtigen Einfluss belehrte, welchen das Studium der geometrischen Werke der Griechen auf die Bildung des mathematischen Sinnes des Jünglinges hat, so halte ich in abwechselnder Reihenfolge Vorträge über die Schriften der alten Geometer, vorzüglich über die des Apollonius von Perga. Dadurch entstand in mir der Wunsch, meinen Zuhörern diese Bücher selbst in die Hände geben zu können. Da die nachgelassenen Werke des Robert Simson, in welchen sich die Bücher *de sectione determinata* befinden, in Deutschland sehr selten, oder nur mit ausserordentlichen Kosten zu haben sind, so entschlofs ich mich zuerst zu einer Bearbeitung dieser Bücher. Ich übergebe dem Publicum eine freye Bearbeitung derselben, nicht eine Uebersetzung. Ich habe, ohne mich an das Wort zu halten, das Buch in dem Geiste seines Verfassers wieder zu geben mich bemühet, habe sämmtliche Aufgaben der beiden ersten Bücher mit Constructionen versehen, welche Simson nicht gegeben hatte, mir hin und wieder eine andere Anordnung der verschiedenen Fälle einer Aufgabe erlaubt, um sie logischer, oder vollständiger zu machen, habe die Beweise so geführt, dafs die Nachweisungen auf die Lehnsätze des Pappus unnöthig wurden, und hin und wieder die Determination auf anderem Wege, als Simson gesucht, und, wie ich glaube, auf einem Wege, welcher leicht zu einem allgemeineren Resultate führte. Man sehe insbesondere die letzten Fälle der Aufgaben des 2. Buches. Zu den Aufgaben dieser Bücher habe ich einige Zusätze hinzugefügt, welche ich von denen des Robert Simson dadurch unterschieden habe, dafs letzteren der Nahme »Simson« beigesetzt, und der Beweis gröfstentheils nicht gegeben ist. Die Zusätze Simsons beziehen sich vorzüglich auf die Untersuchung, ob andere Punkte, als die durch die Construction gefundenen grössere, oder kleinere Verhältnisse bestimmen, als die gefundenen.

Die Aufgaben der zugefügten Bücher des Robert Simson sind, wie im Originale, auf die Aufgaben der vorhergehenden Bücher reducirt. Sie können jungen Studierenden zu einer vortrefflichen Uebung in der Construction dienen. Vielleicht lasse ich später eine Sammlung von Aufgaben folgen, welche sich auf die Lehren der sämmtlichen Bücher gründen. Ich setze dem Buche einen Conspectus voraus, woraus der Reichthum und die Wissenschaftlichkeit der Anordnung erhellet, und welcher das Aufsuchen erleichtert.

Bonn im August 1821.

Diesterweg.

Inhaltsanzeige.

Bezeichnet man die in einer geraden Linie gegebenen Punkte mit a, b, c, d, einen gesuchten Punkt mit x, eine gegebene gerade Linie mit h, eine andere mit k, ein gegebenes Verhältniſs mit p : q, so gewährt folgende Zusammenstellung einen Ueberblick der verschiedenen in nachfolgenden Büchern enthaltenen Aufgaben über die Bestimmung des Punktes x.

Lib. I. Pr. 1. $ax^2 : bx^2 = p : q$ — a x b x

Pr. 2. Ep. 1. $h . ax : bx^2 = p : q$ — a x b

Ep. 2. Pars 1. $h . bx : ax^2 = p : q$ — a b x

Pars. 2. $h . ax : bx^2 = p : q$ — a b x

Pr. 3. Ep. 1. $h . ax : bx . xc = p : q$ — a x b c

Ep. 2. $h . bx : ax . xc = p : q$

Ep. 3. $h . cx : ax . xb = p : q$

Pr. 4. Ep. 1. $h . ax : bx . xc = p : q$ — a b c x

Ep. 2. $h . bx : ax . xc = p : q$

Ep. 3. $h . cx : ax . xb = p : q$

Pr. 5. Ep. 1. $ax . xb : cx^2 = p : q$ — a b x c

Ep. 2. $ax . xc : bx^2 = p : q$

Ep. 3. $bx . xc : ax^2 = p : q$

Pr. 6. Ep. 1. $ax . xb : cx^2 = p : q$ — a b c x

Ep. 2. $bx . xc : ax^2 = p : q$

Ep. 3. $ax . xc : bx^2 = p : q$

Lib. II. Pr. 1. Ep. 1. $ax . xb : cx . xd = p : q$ — a b x c d

Ep. 2. $ax.xc : bx.xd = p : q$

Ep. 3. $ax.xd : bx.xc = p : q$

Pr. 2. Ep. 1. $ax.xd : bx.xc = p : q$ a b c x d

Ep. 2. $ax.xc : bx.xd = p : q$

Ep. 3. $ax.xb : cx.xd = p : q$

Pr. 3. Ep. 1. $ax.xb : cx.xd = p : q$ a b c d x

Ep. 2. $ax.xc : bx.xd = p : q$

Ep. 3. $ax.xd : bx.xc = p : q$

Lib. III. Pr. I. Ep. 1. P. 1. $ax^2 - k^2 : bx^2 = p : q$ a x b

P. 2. $ax^2 + k^2 : bx^2 = p : q$

P. 3. $k^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$

Ep. 2. P. 1. $ax^2 - k^2 : bx^2 = p : q$ a b x

P. 2. $ax^2 + k^2 : bx^2 = p : q$

P. 3. $k^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$

Ep. 3. P. 1. $bx^2 - k^2 : ax^2 = p : q$ a b x

P. 2. $bx^2 + k^2 : ax^2 = p : q$

P. 3. $k^2 - bx^2 : ax^2 = p : q$

Pr. II. Ep. 1. P. 1. $h.ax - k^2 : bx^2 = p : q$ a x b

P. 2. $h.ax + k^2 : bx^2 = p : q$

P. 3. $k^2 - h.ax : bx^2 = p : q$

Ep. 2. P. 1. $h.bx - k^2 : ax^2 = p : q$ a b x

P. 2. $h.bx + k^2 : ax^2 = p : q$

P. 3. $k^2 - h.bx : ax^2 = p : q$

Ep. 3. P. 1. $h.ax - k^2 : bx^2 = p : q$ a b x

P. 2. $h.ax + k^2 : bx^2 = p : q$

P. 3. $k^2 - h.ax : bx^2 = p : q$

Pr. III. Ep. 1. P. 1. $h.ax - k^2 : bx.xc = p : q$ a x b c

P. 2. $h.ax + k^2 : bx.xc = p : q$

P. 3. $k^2 - h.ax : bx.xc = p : q$

Ep. 2. P. 1. $h.bx - k^2 : ax.xc = p : q$ a x b c

P. 2. $h.bx + k^2 : ax.xc = p : q$

P. 3. $k^2 - h.bx : ax.xc = p : q$

Ep. 3. P. 1. $h.cx - k^2 : bx.xc = p : q$ a x b c
P. 2. $h.cx + k^2 : bx.xc = p : q$
P. 3. $k^2 - h.cx : bx.xc = p : q$

Pr. IV. Ep. 1. P. 1. $h.ax - k^2 : bx.xc = p : q$ a b c x
P. 2. $h.ax + k^2 : bx.xc = p : q$
P. 3. $k^2 - h.ax : bx.xc = p : q$

Ep. 2. P. 1. $h.bx - k^2 : ax.xc = p : q$ a b c x
P. 2. $h.bx + k^2 : ax.xc = p : q$
P. 3. $k^2 - h.bx : ax.xc = p : q$

Ep. 3. P. 1. $h.cx - k^2 : ax.xb = p : q$ a b c x
P. 2. $h.cx + k^2 : ax.xb = p : q$
P. 3. $k^2 - h.cx : ax.xb = p : q$

Pr. V. Ep. 1. P. 1. $ax.xb - k^2 : cx^2 = p : q$ a b x c
P. 2. $ax.xb + k^2 : cx^2 = p : q$
P. 3. $k^2 - ax.xb : cx^2 = p : q$

Ep. 2. P. 1. $ax.xc - k^2 : bx^2 = p : q$ a b x c
P. 2. $ax.xc + k^2 : bx^2 = p : q$
P. 3. $k^2 - ax.xc : bx^2 = p : q$

Ep. 3. P. 1. $bx.xc - k^2 : ax^2 = p : q$ a b x c
P. 2. $bx.xc + k^2 : ax^2 = p : q$
P. 3. $k^2 - bx.xc : ax^2 = p : q$

Pr. VI. Ep. 1. P. 1. $ax.xb - k^2 : cx^2 = p : q$ a b c x
P. 2. $ax.xb + k^2 : cx^2 = p : q$
P. 3. $k^2 - ax.xb : cx^2 = p : q$

Ep. 2. P. 1. $bx.xc - k^2 : ax^2 = p : q$ a b c
P. 2. $bx.xc + k^2 : ax^2 = p : q$
P. 3. $k^2 - bx.xc : ax^2 = p : q$

Ep. 3. P. 1. $ax.xc - k^2 : bx^2 = p : q$ a b c x
P. 2. $ax.xc + k^2 : bx^2 = p : q$
P. 3. $k^2 - ax.xc : bx^2 = p : q$

Den Herrn Professoren

von Pfleiderer in Tübingen,

von Bohnenberger in Tübingen,

Hauff in Gent,

Wisseler in Herborn,

seinen verehrtesten Lehrern,

in lebhafter Dankbarkeit gewidmet

vom Verfasser.

Sind p, q einander nicht gleich, z. E. $p > q$ (Fig. 2.), also auch $ac > bd$, so ist $ak > kb$, $ck > kd$, mithin liegt der Halbirungspunkt g von cd in ck, der Halbirungspunkt von ab in ak. Zieht man gh, so ist $cg : ah = cd : ab$ (El. V. 15.)

$= ck : ka$ (El. VI. 2. Cor.)

---

also ist $gh \pm ac$ (El. VI. 2.)

---

folglich $gha = R$

$= ghb$

---

mithin $ga = gb$ (El. I. 4.)

Es ist aber $gbd > R$

---

also ist $gd > \begin{cases} gb \text{ (El. I. 19.)} \\ ga \end{cases}$

mithin schneidet der über cd als Durchmesser beschriebene Kreis die Verlängerung von ab. Es geschehe in e, f.

Verlängert man in beiden Fällen die ca bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in l, und zieht ld,

so ist $cld = R$ (El. III., 31.)

$= cab$ (Constr.)

---

also $ab \pm ld$ (El. I. 28.)

Es ist auch $al \pm bd$ (El. I. 27.)

---

also $bd = al$ (El. I. 34.)

Nun ist $ea . af = ca . al$ (El. III. 35.)

Folglich ist auch $\left.\begin{matrix} ae . eb \\ af . fb \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = ca . bd \text{ (El. III. 3.)} \\ = p . q \end{matrix}$ q. e. d.

Vorrede.

Ueber den Werth des Studiums der Schriften der griechischen Geometer ist von alten Zeiten her nur Eine Stimme gewesen.

Unter ihnen hieſs Apollonius von Perga der groſse Geometer. Daſs er diesen Nahmen verdiente, davon zeugen seine auf uns gekommenen Schriften. Leider sind mehrere der von ihm verfaſsten verlohren gegangen. Zu letzteren gehört eine merkwürdige Schrift περὶ διωρισμένης τόμης, *de sectione determinata*, von welcher Pappus in seinen *collectionibus mathematicis* Nachricht giebt. Sie besthäftigte sich mit der Bestimmung von Punkten in einer geraden Linie, in welcher andere Punkte gegeben sind, so daſs die Quadrate, oder Rechtecke aus den durch die gesuchten und die gegebenen Punkte bestimmten Segmenten, oder aus gegebenen geraden Linien und diesen Segmenten zu den Quadraten, oder Rechtecken aus den übrigen Segmenten gegebene Verhältnisse haben.

Die Nachrichten des Pappus über den Inhalt jener Schrift und die Behandlung dieser Aufgabe in schneidet sie zwischen a, b in m, n (Fig. 4). Da nun $fab = R$, so ist auch $afe = R$ (El. I. 29), folglich ist af eine Tangente jenes Kreises (El. III. 16), mithin ist in dem ersten Falle

$$\left.\begin{array}{l} af^2 \\ p^2 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} ac^2 \text{ (El. III. 17. Zus.), also} \\ ac.cb. \end{array}$$

c der gesuchte Punkt; in dem zweiten Falle

$$\begin{array}{rl} af^2 & = ma.an \text{ (El. III. 36)} \\ & = \left\{\begin{array}{l} am.mb \\ an.nb \end{array}\right\} \text{ (El. III. 35), also sind m, n} \end{array}$$

Punkte von der verlangten Eigenschaft.

2) Ist nicht $p = q$, sondern z. E. $p < q$ (Fig. 5. 6), und macht man $ag = be$, zieht auch eg, so ist $age = R$ (El. I. 29), also $\left.\begin{array}{l} gfe \\ feb \end{array}\right\} < R \left\{\begin{array}{l} \text{(El. I. 17).} \\ \text{(El. I. 29)} \end{array}\right.$ Zieht man nun $hk \perp ab$, so ist $hke = R$ (El. I. 29), folglich $he > hk$; der oft erwähnte Kreis schneidet also die Verlängerung von ek. Es geschehe in d. Zieht man fd, so ist $edf = R$ (El. III. 31.) $= abe$, also $af = bd$ (El. I. 34), mithin $eb.bd = eb.af = p.q$. Nun ist

$$\begin{array}{rl} eb.bd + ek^2 & = bk^2 \text{ (El. II. 6)} \\ & = ch^2 \text{ (El. I. 34)} \end{array}$$

$$\text{Es ist aber } \left.\begin{array}{l} p.q \\ eb.bd \end{array}\right\} \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1/4\, ab^2 \text{ (Det.)} \\ bc^2 \end{array}\right.$$

$$\text{also ist } \left.\begin{array}{l} bc^2 \\ hk^2 \end{array}\right\} + ek^2 \left.\begin{array}{c} \\ \\ he^2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} = \\ > \end{array} \left\{\begin{array}{l} eb.bd + ek^2 \\ ch^2 \end{array}\right.$$

$$\text{Mithin } he \begin{array}{c} = \\ > \end{array} ch$$

Also berührt der über fe beschriebene Kreis die ab in c (Fig. 5), oder schneidet sie zwischen a, b in m, n (Fig. 6). In jenem Falle ist

$$\left.\begin{array}{r} bc^2 \\ bc.ca \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} eb.bd \ \text{(El. III. 36)} \\ p.q \end{array}\right.$$

also ist c der gesuchte Punkt.

In diesem Falle ist $\left.\begin{array}{r} mb.bn \\ an.nb \\ am.mb \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} eb.bd \\ p.q \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \text{(El. III. 36. Cor.)} \\ \text{(El. III. 3).} \end{array}\right.$

Also thun die Punkte m, n der Aufgabe Genüge.

Lehnsatz C. (Fig. 56.)

Wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, x, c, d so bestimmt sind, daſs $ax.xc = bx.xd$, so ist für jeden zwischen $\left\{\begin{array}{l} b, x \\ c, x \end{array}\right\}$ gelegenen Punkt

$$\left\{\begin{array}{l} g \\ h \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} ag.gc > bg.gd \\ ah.hc < bh.hd \end{array}\right\}$$

Beweis.

Es ist $ax.xc = bx.xd$ (p. hyp.)

also ist $bx : xc = ax : xd$ (El. VI. 16)
$= ax - xb : dx - xc$ (El. V. 5)
$= ab : cd$

folglich $\left.\begin{array}{l} bx + xc \\ bc \end{array}\right\} : cx = ab + cd : dc$ (El. V. 18)

mithin $bc.cd = (ab+cd)\,cx$ (El. VI. 16)

folglich sowohl

$$\left.\begin{array}{r} (ab+cd)\,cg - (ab+cd)\,cx \\ (ab+cd)\,gx \end{array}\right\} \begin{array}{l} = (ab+cd)\,cg - bc.cd \\ = ab.cg - (bc-cg)\,cd \\ = ab.cg - bg.cd \\ = (ab+bg)\,gc - (cd+cg)\,gb \\ = ag.gc - dg.gb \end{array}$$

also $ag.gc > dg.gb$

als auch

$$\left.\begin{array}{r} ab+cd)cx-(ab+cd)ch \\ (ab+cd)hx \end{array}\right\} \begin{array}{l} = be.cd-(ab+cd)ch \\ =(bc-ch)cd-ab.ch \\ = bh.cd-ab.ch \\ = bh(cd+ch)-(ah+bh)hc \\ = bh.hd-ah.hc \end{array}$$

also $bh.hd > ah.hc$.

Der Bücher

de sectione determinata

Erstes.

Des APOLLONIUS von PERGA

ERSTES BUCH

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig 7.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, einen dritten Punkt x zu finden, so dafs das Verhältnifs der Quadrate der Segmente jener Linie, welche zwischen dem gesuchten Punkte und jenen gegebenen enthalten sind, einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs $ax^2 : bx^2 = p : q$, so ist, da p : q ein gegebenes Verhältnifs ist, auch das Verhältnifs ax : xb gegeben (Dat. 58*). Es ist aber auch $ax \pm xb = ab$ eine gegebene gerade Linie, je nachdem der Punkt x zwischen a, b, oder auf der Verlängerung von a b liegen soll, also ist sowohl ax, als xb (Dat. 8), somit der Punkt x gegeben.

*) Die Citate der Data des Euklides beziehen sich auf die von Schwab besorgte Ausgabe, Stuttgart 1780.

Construction.

Auf einer unter einem beliebigen Winkel in a an ab gelegten geraden Linie nehme man ad, de in dem Verhältnisse von p : q, beschreibe über ae einen Halbkreis, errichte in d auf ad ein Perpendikel df, welches dem Halbkreise in f begegne, mache dg = df = dh, ziehe bg, bh, und $dx \pm bg$, $dx' \pm bh$, so sind x, x' die gesuchten Punkte.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ax : xb &= ad : dg \text{ (El. VI. 2)} \\ &= ad : df \text{ (Constr.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ax^2 : xb^2 &= ad^2 : df^2 \text{ (El. VI. 22)} \\ &= ad : de \text{ (El. VI. 20. Cor. 2)} \\ &= p : q \text{ (Constr.)} \end{aligned}$$

Für den Punkt x' wird der Beweis eben so geführt.

Zusatz 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Man beschreibe über xx' als Durchmesser einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt k sey, und ziehe von a, b an irgend einen Punkt g in dem Umfang desselben gerade Linien ag, gb, ziehe auch kg;

$$\text{so ist } \left.\begin{aligned} ax : xb &= p : q \\ ax' : x'b &= p : q \end{aligned}\right\} \text{(Bew.)}$$

$$\begin{aligned} \text{also } ax : xb &= ax' : x'b \\ &= ax' - ax : bx' - bx \text{ (El. V. 5)} \\ &= 2kx : 2bk \\ &= kx : bk \end{aligned}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{aligned} ax+xk : bx+bk \\ ak : kx \\ ak : kg \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} kx : bk \text{ (El. V. 1)} \\ gk : kb \end{aligned}\right.$$

$$\frac{\text{Es ist auch } akg = gkb}{\text{mithin } ag : gb = gk : kb \text{ (El. VI. 6)}}$$
$$= p : q$$

Es ist also das Verhältnifs der Entfernungen irgend eines Punktes in dem Umfang jenes Halbkreises von den gegebenen Punkten a, b ein constantes. Siehe Apollonius über die ebenen Oerter, wiederhergestellt von R. Simson, übersetzt von Camerer, Leipzig 1796. pag. 211. sq.

Aufgabe II. (Fig. 8. 9. 10. 11.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, einen dritten Punkt x anzugeben, so dafs das Verhältnifs des Rechtecks aus einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem jener Punkte zu dem Quadrate des anderen Segmentes einem gegebenen Verhältnisse p:q gleich sey.

Fall I. (Fig. 8.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b liegen.

Analysis.

Man nehme an, x sey der gesuchte Punkt, so dafs also $d.ax : bx^2 = p : q$. Man suche die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d, und schneide von der Verlängerung von ab eine gerade Linie be gleich derselben ab. Alsdann ist

$$d.ax : bx^2 = d : be$$
$$\frac{= d.ax : be.ax \text{ (El. VI. 1)}}{\text{folglich } bx^2 = be.ax}$$
$$\text{mithin auch } ax : xb = xb : bc \text{ (El. VI. 17)}$$
$$\frac{\text{und } \left.\begin{matrix} ax + xb \\ ab \end{matrix}\right\} : bx = \left\{\begin{matrix} xb + be \\ xe \end{matrix}\right\} : eb \text{ (El. V. 18)}}{\text{also } ab.be = bx.xe \text{ (El. VI. 16)}}$$

Es sind aber ab, be gegeben (hyp. u. Dat. 2), also ist $ab.be$ gegeben, mithin ist auch $bx.xe$ gegeben. Es ist aber $xe - xb = be$ gegeben, folglich bx (Dat. 85) und somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man errichte in b auf ab ein Perpendikel, nehme auf demselben zu verschiedenen Seiten $bp = p$, $bq = q$, mache $bh = d$, ziehe ph und $qe \parallel ph$, errichte in e ein Perpendikel ef, nehme $ef = be$, $bg = ba$, und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnittspunkt x desselben mit ab wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ex.xb &= ef.bg \text{ (Lehnsatz A.)} \\ &= eb.ba \text{ (Constr.)} \end{aligned}$$

folglich ist $ab:bx = xe:eb$
Es is aber $xe > eb$ (Lehns. A.)

mithin auch $ab > bx$, also liegt der Punkt x zwischen a, b. Ferner ist

$$\left.\begin{matrix} ab - bx \\ ax \end{matrix}\right\} : xb = \left\{\begin{matrix} xe - eb \\ xb \end{matrix}\right\} : be$$

folglich $ax.be = bx^2$

$$\begin{aligned} \text{mithin auch } d.ax : bx^2 &= d.ax : ax.be \\ &= d : be \\ &= p : q \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit der Verlängerung der geraden Linie ab

hat man $by . ye = bg . ef$ (Lehns. A.)
$= ab . be$ (Constr.)

folglich $ab : by = ye : eb$

mithin auch $\left.\begin{matrix} ab+by \\ ay \end{matrix}\right\} : yb = \left\{\begin{matrix} ye+eb \\ by \end{matrix}\right\} : be$

also $ay . be = by^2$

demnach $d . ay : by^2 = d . ay : ay . be$
$= d : be$
$= p : q$

Es ist also auch in der Verlängerung von ab ein Punkt y gefunden worden, so daſs $d . ay : by^2 = p : q$, welches Buch 1. Aufg. II. Fall 2. b. ist.

Zus. 3. Da $d . ax : bx^2 = p : q$
und $d . ay : by^2 = p : q$

so ist auch $d . ax : bx^2 = d . ay : by^2$

folglich $\left.\begin{matrix} d . ax : d . ay \\ ax : ay \end{matrix}\right\} = bx^2 : by^2$

und es läſst sich die Aufgabe auflösen: wenn die Punkte a, b, y gegeben sind, einen Punkt x zwischen a, b zu finden, so daſs $ax : ay = bx^2 : by^2$.

Fall 2. (Fig. 9. 10. 11.)

Der gesuchte Punkt x soll auf der Verlängerung von ab liegen, und es soll seyn

a) $d . bx : ax^2 = p : q$ (Fig. 9. 10).

Analysis.

Man nehme an, x sey der gesuchte Punkt, construire die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d, und schneide von der gegebenen Linie von a an eine jener gleiche gerade Linie ae ab, so daſs also

$$d.bx : ax^2 = d : ae$$
$$= d.bx : bx.ae$$

$$\text{folglich } ax^2 = bx.ae$$

$$\text{mithin auch } bx : xa = ax : ae$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} ax - xb \\ ab \end{matrix}\right\} : ax = \left\{\begin{matrix} ea - ax \\ ex \end{matrix}\right\} : ae$$

$$\text{also } ba.ae = ax.xe.$$

Es sind aber ba (hyp.) und ae (Dat. 2.) gegeben, also ist auch ba.ae, und somit ax.xe gegeben. Auch ist ax + xe = ae gegeben, folglich (Dat. 86) ax, xe und der Punkt x gegeben.

Determination.

Vermöge El. II. 5. muſs seyn $ba.ae \underset{<}{=} \frac{1}{4} ae^2$

$$\text{folglich } ba \underset{<}{=} \tfrac{1}{4} ae$$

$$\text{Es ist aber } p : q = d : ae$$

$$\text{mithin auch } p : \tfrac{1}{4} q = d : \tfrac{1}{4} ae$$

$$\text{also muſs seyn } p : \tfrac{1}{4} q \underset{<}{=} d : ab$$

$$\text{und auch } p : q \underset{<}{=} d : 4 ab$$

Construction.

Man verlängere ab nach beiden Seiten, nehme ad = d, errichte in a auf ab ein Perpendikel, mache zu verschiedenen Seiten desselben ap = p, aq = q, ziehe dp, und qe ∥ dp, errichte in e ein Perpendikel = ea, mache auch ag = ab, und beschreibe über der die Punkte g, f verbindenden geraden Linie gf als Durchmesser einen Kreis. Derselbe wird der gegebenen Linie in dem gesuchten Punkte begegnen.

Beweis.

$$\text{Es ist } p:q \overset{=}{<} d:4ab \text{ (Determ).}$$

$$\text{also auch } p:\tfrac{1}{4}q \overset{=}{<} d:ab$$

$$\text{Es ist aber } p:q = d:ae$$

$$\text{folglich } p:\tfrac{1}{4}q = d:\tfrac{1}{4}ae$$

$$\text{mithin } d:\tfrac{1}{4}ae \overset{=}{<} d:ab$$

$$\text{also } \tfrac{1}{4}ae \overset{=}{>} ab$$

$$\text{und auch } \tfrac{1}{4}ae^2 \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} ba.ae \\ ef.ag \end{matrix}\right.$$

also berührt der über gf als Durchmesser beschriebene Kreis die ae in ihrem Halbirungspunkte x, (Fig. 9), oder schneidet sie zwischen a, e in zwey Punkten x, y (Fig. 10) (Lehnsatz B). In dem ersten Falle ist

$$ax^2 = \left\{\begin{matrix} ag.ef \\ ba.ae \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } ba:ax = xa:ae$$

$$\text{Es ist aber } xa < ae$$

folglich auch $ba < ax$. Es liegt also x auf der Verlängerung von ab.

$$\text{Ferner ist } \left\{\begin{matrix} xa-ab \\ bx \end{matrix}\right\} : ax = \left\{\begin{matrix} ea-ax \\ ex \\ ax \end{matrix}\right\} : ae$$

$$\text{mithin } ax^2 = bx.ae$$

$$\begin{aligned} \text{also auch } d.bx : ax^2 &= d.bx : bx.ae \\ &= d:ae \\ &= p:q. \end{aligned}$$

In dem zweiten Falle ist $ax.xe = ag.ef$
$= ba.ae$

folglich $ba : ax = xe : ea$

Es ist aber $xe < ea$ (Lehns. B)

also auch $ba < ax$; es liegt also x auf der Verlängerung von ba.

Ferner ist $\left.\begin{matrix} ax-ba \\ bx \end{matrix}\right\} : ax = \left\{\begin{matrix} ea-xe \\ ax \end{matrix}\right\} : ea$

folglich $ax^2 = bx.ea$

mithin $d.bx : ax^2 = d.bx : bx.ea$
$= d : ea$
$= p : q$

Eben so wird der Beweis für y geführt.

Zus. 1. (Sims.) Das Verhältniſs, welches durch den Halbirungspunkt von ae bestimmt wird, ist grösser, als jedes andere durch einen auf be oder ihrer Verlängerung über e hinaus gelegenen Punkt bestimmte. Die dem Halbirungspunkte näher liegenden Punkte der ae auf einerley Seite des Halbirungspunktes bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren. Es kann aber der von zwey auf verschiedenen Seiten des Halbirungspunktes gelegenen Punkten dem Halbirungspunkte näher liegende Punkt ein kleineres Verhältniſs bestimmen, als der entferntere.

Zus. 2. Es ist (Fig. 10) $d.bx : ax^2 = p : q$
und $d.by : ay^2 = p : q$

folglich $d.bx : ax^2 = d.by : ay^2$

mithin $\left.\begin{matrix} d.bx : d.by \\ \text{oder } bx : by \end{matrix}\right\} = ax^2 : ay^2$

Und es läfst sich, wenn die Punkte a, b, y gegeben sind, der Punkt x auf der Verlängerung von ab finden, so dafs $bx : by = ax^2 : ay^2$.

b) Es soll werden $d.ax : bx^2 = p : q$. (Fig. 11).

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt. Man suche die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d, und trage eine ihr gleiche gerade Linie be auf die Verlängerung von ab. Alsdann ist

$$\begin{aligned} d.ax : bx^2 &= d : be \\ &= d.ax : ax.be \end{aligned}$$

$$\text{folglich } bx^2 = ax.be$$

$$\text{mithin } ax : xb = bx : be$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} ax - xb \\ ab \end{matrix}\right\} : bx = \left\{\begin{matrix} xb - be \\ ex \end{matrix}\right\} : eb$$

$$\text{folglich } ab.be = bx.xe.$$

Nun sind ab (hyp.), be (Dat. 2) gegeben, also ist auch $ab . be$, folglich auch $bx . xe$ gegeben. Nun ist $bx - xe = be$ gegeben, also (Dat. 85) auch bx, xe und der Punkt x.

Construction.

Man errichte in b auf ab ein Perpendikel, nehme auf demselben zu verschiedenen Seiten $bp = p$, $bq = q$, schneide von ba ab $bd = d$, ziehe dp und $qe \# dp$, errichte in e auf ae ein Perpendikel, nehme auf verschiedenen Seiten von ae die Linie $bg = ba$, $ef = eb$, ziehe gf und beschreibe über gf als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ae in dem gesuchten Punkte x schneiden wird.

Beweis.

Es ist $bx.xe = bg.ef$ (Lehns. A.)
$= ba.eb$

folglich $ab:bx = xe:eb$

also $\left.\begin{matrix}ab+bx\\ax\end{matrix}\right\}:xb = \left\{\begin{matrix}xe+eb\\bx\end{matrix}\right\}:be$

mithin $bx^2 = ax.be$

also $d.ax:bx^2 = d.ax:ax.be$
$= d:be$
$= p:q$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte, als x, bestimmen grössere, die entfernteren kleinere Verhältnisse.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit der verlängerten eb hat man

$by.ye = bg.ef$ (Lehns. A.)
$= ba.eb$

also $ab:by = ye:eb$.
Es ist aber $ye > eb$

also $ab > by$

Mithin liegt y zwischen a, b, und es ist ferner

$\left.\begin{matrix}ab-by\\ay\end{matrix}\right\}:yb = \left\{\begin{matrix}ye-eb\\by\end{matrix}\right\}:be$,

daher auch $by^2 = ay.be$

und $d.ay:by^2 = d.ay:ay.be$
$= d:be$
$= p:q$

welches Buch 1, Auf. II. Fall 1. ist.

Zus. 3. Es ist $d.ax : bx^2 = p:q$
und $d.ay : by^2 = p:q$

also $d.ax : bx^2 = d.ay : by^2$

folglich $\left.\begin{array}{l} d.ax : d.ay \\ ax : ay \end{array}\right\} = bx^2 : by^2$

und es läſst sich die Aufgabe auflösen: auf der Verlängerung der geraden Linie ab, in welcher die Punkte a, y, b gegeben sind, einen vierten Punkt x zu finden, so daſs $ax : ay = bx^2 : by^2$.

Aufgabe III. (Fig. 12—20).

Auf einer geraden Linie, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, einen vierten x zwischen zweyen derselben zu finden, so daſs das Verhältniſs des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den übrigen Segmenten einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 12. 13. 14. 15.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b so gefunden werden, daſs $d.ax : bx.xc = p:q$.

Analysis. (Fig. 12.)

Es sey der gesuchte Punkt x. Man gedenke sich die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d gesucht und von b an auf die Verlängerung von ab eine ihr gleiche gerade Linie be gelegt. So ist

$$d . ax : bx . xc = d : be$$
$$= d . ax : be . ax$$

also $bx . xc = be . ax$

folglich $ax : xc = bx : be$

und $\left.\begin{matrix} ax + xc \\ ac \end{matrix}\right\} : cx = \left\{\begin{matrix} xb + be \\ xe \end{matrix}\right\} : eb$

mithin $ac . be = cx . xe$

Nun sind ac (hyp.), be (Dat. 2) gegeben, also ist auch ac.be gegeben, mithin auch cx.xe gegeben. Es ist aber auch $\left.\begin{matrix} ex - cx \\ \text{oder } cx - ex \end{matrix}\right\}$ gegeben, also ist cx (Dat. 85), und somit der Punkt x gegeben.

Construction. (Fig. 13. 14. 15.)

Von dem durch b gelegten Perpendikel auf ab schneide man auf verschiedenen Seiten $bp = p$, $bq = q$, von ba oder ihrer Verlängerung $bd = d$ ab, ziehe dp und $qe \perp dp$. Von den auf verschiedenen Seiten von eb durch b, e gezogenen Perpendikeln auf be schneide man $ef = eb$, $cg = ca$ ab, und beschreibe über der Verknüpfungslinie fg als Durchmesser einen Kreis. Derselbe wird ab in dem gesuchten Punkte x schneiden.

Beweis.

Es ist $cx . xe = cg . ef$ (Lehns. A.)
$$= ca . eb$$

also $ac : cx = xe : eb$

Nun ist sowohl $be < ea$, als auch $ac > cb$

mithin sowohl $\left.\begin{matrix} ca . eb \\ cx . xe \end{matrix}\right\} < ca . ae$, als auch $\left.\begin{matrix} ca . eb \\ cx . xe \end{matrix}\right\} > cb . be$

also sowohl $cx < ca$, als auch $cx > cb$

folglich liegt der Punkt x zwischen a, b.

Ferner ist $\left.\begin{matrix} ac-cx \\ ax \end{matrix}\right\} : xc = \left\{\begin{matrix} xe-eb \\ bx \end{matrix}\right\} : be$

$$\text{also}\quad bx.xc = ax.be$$

$$\begin{aligned} \text{mithin}\quad d.ax:bx.xc &= d.ax:ax.be \\ &= d:be \\ &= p:q \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims) Die dem Punkte a näher liegenden Punkte der ab bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit ac in ihrer Verlängerung ist

$$\begin{aligned} ey.yc &= ef.cg \ \text{(Lehns. A.)} \\ &= ac.eb \end{aligned}$$

$$\text{also}\quad ac:ey = cy:eb$$

$$\text{und}\quad \left.\begin{matrix} ac+cy \\ ay \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} ye+eb \\ by \end{matrix}\right\} = cy:eb$$

$$\text{folglich}\quad ay.eb = by.yc$$

$$\begin{aligned} \text{mithin}\quad d.ay:by.yc &= d.ay:ay.eb \\ &= d:eb \\ &= p:q \end{aligned}$$

welches Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. ist.

Zus. 3. Es ist also $d.ax:bx.xc = d.ay:by.yc$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{matrix} d.ax:d.ay \\ ax:ay \end{matrix}\right\} = bx.xc:by.yc$$

und es läfst sich die Aufgabe auflösen: auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, zwischen a, b einen fünften x zu bestimmen, so dafs $ax:ay = bx.xc:by.yc$.

Fall 2. (Fig. 16. 17.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b liegen, so dafs d . bx : ax . xc = p : q.

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, so dafs also

$$d.bx : ax.xc = p : q$$

Man gedenke sich eine gerade Linie ae gleich der vierten geometrischen Proportionallinie zu p, q, d von a aus auf ac getragen, so ist

$$d.bx : ax.xc = d : ae.$$
$$= d.bx : ae.bx$$

$$\text{folglich } ax.xc = ae.bx$$

$$\text{mithin } cx : ae = bx : ax$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} cx - bx \\ bc \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} ae - ax \\ ex \end{matrix}\right\} = cx : ae$$

$$\text{also } ae.bc = cx . xe$$

Es sind aber ae (Dat. 2), bc (hyp.) gegeben, also ist auch ae.bc, somit cx.xe gegeben. Nun ist auch cx—xe, oder ex—cx = ce gegeben, folglich ist cx (Dat. 85), also auch der Punkt x gegeben.

Construction.

Auf der Verlängerung von ba nehme man ad = d, von dem durch a gelegten Perpendikel auf ab schneide man zu verschiedenen Seiten ap = p, aq = q ab, ziehe dp, und qe ∥ dp, lege durch e, c die auf ac zu verschiedenen Seiten perpendicular stehenden geraden Linien ef, cg, mache ef = ea, cg = cb und beschreibe über der Verbindungslinie gf als Durchmesser einen Kreis. Dieser wird die ab in dem gesuchten Punkte schneiden.

Beweis.

Es ist $ex.xc = ef.cg$ (Lehns. A.)

$$= ae.cb$$

folglich $bc:ex = cx:ae.$

Nun ist $bc < ca$

also $\left.\begin{matrix} ae.bc \\ ex.xc \end{matrix}\right\} < ca.ae$

folglich $ex < ea$

also auch $bc < cx$

Mithin liegt der Punkt x zwischen a, b. Ferner ist

$$\left\{\begin{matrix} cx-cb \\ bx \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} ae-ex \\ ax \end{matrix}\right\} = cx:ae$$

also $ae.bx = ax.xc$

mithin $d.bx:ax.xc = d.bx:ae.bx$

$$= d:ae$$

$$= p:q$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte a näher liegenden Punkte der ab bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten ac ist

$$ey.yc = ef.cg$$

$$= ae.cb$$

also $cy:ae = bc:ey$

und $\left\{\begin{matrix} cy+cb \\ by \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} ae+ey \\ ay \end{matrix}\right\} = yc:ae$

mithin $ae.by = ay.yc$

also auch $d.by:ay.yc = d.by:ae.by$

$$= d:ae$$

$$= p:q$$

welches Buch 1, Aufg. IV. Fall 2. ist.

Zus. 3. Es ist also $d.bx:ax.xc = d.by:ay.yc$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} d.bx:d.by \\ bx:by \end{matrix}\right\} = ax.xc:ay.yc$$

Und es läfst sich, wenn in einer geraden Linie vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, ein fünfter x zwischen a, b finden, so dafs $bx:by = ax.xc:ay.yc$

Fall 3. (Fig. 18. 19. 20.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b liegen, so dafs $d.cx:ax.xc = p:q$.

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, und man gedenke sich von a aus auf ab eine Linie ae gleich der vierten geometrischen Proportionallinie zu p, q, d getragen; so ist also $d.cx:ax.xb = d:ae$

$$= d.cx:ae.cx$$

$$\text{folglich } ax.xb = ae.cx$$

$$\text{also } cx:xb = ax:ae$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} cx-xb \\ bc \end{matrix}\right\}:bx = \left\{\begin{matrix} ax-ae \\ ex \end{matrix}\right\}:ea$$

$$\text{mithin } bx.xe = ae.bc.$$

Es sind aber bc (hyp.), ae (Dat. 2) gegeben, also ist auch $ae.bc$, somit $bx.xe$ gegeben. Es ist aber auch $bx+xe = be$ gegeben, folglich ist (Dat. 86) bx, somit der Punkt x gegeben.

Determination.

Zufolge El. II. 5. mufs seyn

$$ae.bc \;\begin{cases} = \tfrac{1}{4}be^2 \\ < bh^2, \text{wenn } be \text{ in } h \text{ halbirt wird,} \end{cases}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} ae.bc+ec.bc \\ ac.cb \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \begin{cases} bh^2+ec.cb \\ ch^2 \end{cases} \quad \text{(El. II. 6).}$$

$$\text{und } 2\sqrt{ac.cb} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \begin{cases} 2ch \\ ce+cb \end{cases}$$

$$\text{folglich auch } ac+cb-2\sqrt{ac.cb} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \begin{cases} ac+cb-ce-cb \\ ae \end{cases}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{l} d:ae \\ p:q \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} d:ac+cb-2\sqrt{ac.cb}$$

Construction.

Auf der Verlängerung von ba nehme man ad = d, von einem durch a auf ab gelegten Perpendikel schneide man ap = p, aq = q ab, ziehe dp und qe ∥ dp; in e, b errichte man zu einerley Seite von ab Perpendikel auf dieser Linie, nehme ef = ea, bg = bc, und beschreibe über der geraden Linie fg als Durchmesser einen Kreis. Derselbe wird der ab in dem gesuchten Punkte x begegnen.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{array}{l} p:q \\ d:ae \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} d:ac+cb-2\sqrt{ac.cb}$$

$$\text{folglich ist } \left.\begin{array}{r} ae \\ ac-ce \\ ac+cb-ce-cb \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} ac+cb-2\sqrt{ac.cb}$$

$$\text{also }\left.\begin{matrix} ce+cb \\ 2ch \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 2\sqrt{ac.cb}$$

$$\text{folglich } ch \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \sqrt{ac.cb}$$

$$\text{und } ch^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} ac.cb$$

$$\text{mithin }\left.\begin{matrix} ch^2 - ec.cb \\ bh^2 \\ \tfrac{1}{4}be^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \left\{\begin{matrix} ac.cb - ec.cb \\ ae.cb. \end{matrix}\right.$$

Also berührt, oder schneidet der über fg beschriebene Kreis die Linie be (Lehns. B).

Im ersten Fall (Fig. 19) ist

$$bh^2 = ef.bg \text{ (Lehns. B.)}$$
$$= ae.bc$$

$$\text{also } cb:bh = hb:ae$$

$$\text{und }\left.\begin{matrix} cb+bh \\ ch \end{matrix}\right\} : hb = \left\{\begin{matrix} hb+ae \\ ah \end{matrix}\right\} : ae$$

$$\text{folglich } ae.ch = ah.hb$$

$$\text{also auch } d.ch:ah.hb = d.ch:ae.ch$$
$$= d:ae$$
$$= p:q$$

Im zweiten Fall (Fig. 20) ist $bx.xe = ef.bg$
$$= ae.bc$$

$$\text{also } cb:bx = xe:ae$$

$$\text{und }\left.\begin{matrix} cb+bx \\ cx \end{matrix}\right\} : xb = \left\{\begin{matrix} xe+ea \\ ax \end{matrix}\right\} : ae$$

$$\text{folglich } ax.xb = cx.ae$$

$$\text{mithin } d.cx:ax.xb = d.cx:cx.ae$$
$$= d:ae$$
$$= p:q$$

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt h der Linie ae bestimmt ein kleineres Verhältnifs, als jeder andere zwischen a, b gelegene Punkt. Von zwey auf derselben Seite des Halbirungspunktes zwischen a, b gelegenen Punkten bestimmt der nähere ein kleineres Verhältnifs, als der entferntere.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit be ist $by.ye = ef.bg$
$$= ae.bc$$

$$\text{also } cb:by = ye:ae$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} cb+by \\ cy \end{matrix}\right\}:yb = \left\{\begin{matrix} ye+ae \\ ay \end{matrix}\right\}:ea$$

$$\text{folglich } ay.yb = ae.cy$$

$$\text{mithin } d.cy:ay.yb = d.cy:ae.cy$$
$$= d:ae$$
$$= p:q$$

Zus. 3. Es ist also $d.cx:ax.xb = d.cy:ay.yb$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} d.cx:d.cy \\ cx:cy \end{matrix}\right\} = ax.xb:ay.yb.$$

Es läfst sich also auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, zwischen a, b ein fünfter x finden, so dafs

$$cx:cy = ax.xb:ay.yb.$$

Aufgabe IV. (Fig. 21—27.)

Auf der Verlängerung einer geraden Linie, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, einen vierten Punkt x zu finden, so daſs das Verhältniſs des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den Segmenten zwischen x und den anderen Punkten einem gegebenen Verhältnisse p:q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 21. 22.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daſs $d.ax:bx.xc = p:q$.

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, und die Linie be sey so bestimmt, daſs $p:q = d:be$; so ist

$$d.ax:bx.xc = d:be$$
$$= d.ax:be.ax$$

$$\text{also } bx.xc = be.ax$$

$$\text{folglich } ax:xc = bx:be$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} ax-xc \\ ac \end{matrix}\right\} : cx = \left\{\begin{matrix} bx-be \\ ex \end{matrix}\right\} : eb$$

$$\text{mithin } ac.be = cx.xe$$

Nun sind ac (hyp.), be (Dat. 2) gegeben, folglich ist auch $ac.be$, somit $cx.xe$ gegeben. Es ist aber auch $cx-xe = ce$, oder $ex-cx = ce$ gegeben, je nachdem $be \gtreqless bc$, folglich ist auch cx (Dat. 85) und der Punkt x gegeben.

Construction.

Man mache $bd = d$, $abd = abq = R$, $bp = p$, $bq = q$, $eq = dp$, $ecg = R = cef$, $cg = ca$, $ef = eb$, und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis, Der Durchschnitt desselben mit der verlängerten ae wird der gesuchte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } cx \cdot xe = cg \cdot ef \text{ (Lehns. A.)}$$
$$= ac \cdot be$$

$$\text{also } ac : cx = xe : eb$$

$$\text{und } \underbrace{ac + cx}_{ax} : xc = \underbrace{xe + eb}_{bx} : be$$

$$\text{folglich } bx \cdot xc = ax \cdot be$$

$$\text{mithin } d \cdot ax : bx \cdot xc = d \cdot ax : ax \cdot be$$
$$= d : be$$
$$= p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit ac hat man $cy \cdot ye = cg \cdot ef$ (Lehns. A.)
$$= ac \cdot be$$

Es ist aber sowohl $ca : ae > ca : be$, als $cb : be < ac : be$

folglich ist auch $ca \cdot ae > cy \cdot ye$, und $cb \cdot be < cy \cdot ye$

mithin $ca > cy$, und $cb < cy$.

Es liegt also der Punkt y zwischen a, b, und man hat ferner $ac : cy = ye : eb$

$$\text{folglich } \underbrace{ac - cy}_{ay} : yc = \underbrace{ye - eb}_{by} : be$$

$$\text{also } by \cdot yc = ay \cdot be.$$

folglich $d.ay:by.yc = d.ay:ay.be$

$$= d:be$$
$$= p:q$$

welches Buch 1. Aufg. III. Fall 1 ist.

Zus. 3. Es ist also $d.ax:bx.xc = d.ay:by.yc$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} d.ax:d.ay \\ ax:ay \end{matrix}\right\} = bx.xc:by.yc$$

Und man kann, wenn auf einer geraden Linie vier Punkte a, y, b, c gegeben sind, auf der Verlängerung von ac einen fünften x finden, so dafs

$$ax:ay = bx.xc:by.yc.$$

Fall 2. (Fig. 23. 24.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, dafs

$$d.bx:ax.xc = p:q.$$

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, und es sey $p:q = d:ae$,

so ist $d.bx:ax.xc = d:ae$

$$= d.bx:ae.bx$$

also $ax.xc = ae.bx$

folglich $bx:xc = ax:ae$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} bx-xc \\ bc \end{matrix}\right\}:cx = \left\{\begin{matrix} ax-ae \\ ex \end{matrix}\right\}:ea$$

mithin $cx.xe = bc.ae$

Nun sind bc (hyp.), ae (Dat. 2) gegeben, also ist auch $bc.ae$, somit $cx.xe$ gegeben. Es ist aber auch $ce = cx-xe$, oder $ce = ex-xc$ gegeben; je nachdem $ae \gtreqless ac$, folglich ist cx (Dat. 85), somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man mache $ad = d$, $dap = R = daq$, $ap = p$, $aq = q$, $eq \perp dp$, $bcg = R = cef$, $cg = cb$, $ef = ea$, und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt desselben mit der verlängerten ac wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } cx.xe = cg.ef \text{ (Lehns. A.)}$$
$$= cb.ea$$

$$\text{also } bc:cx = xe:ea$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} bc+cx \\ bx \end{matrix}\right\} : xc = \left\{\begin{matrix} xe+ea \\ ax \end{matrix}\right\} : ae$$

$$\text{folglich } ax.xc = ae.bx$$

$$\text{mithin } d.bx:ax.xc = d.bx:ae.bx$$
$$= d:ae$$
$$= p:q$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit ab hat man $cy.ye = cg.ef$
$$= ae.bc$$

Es ist aber sowohl $ae.bc > eb.bc$, als $ae.bc < ea.ac$

folglich ist auch $cy.ye > cb.be$, und $cy.ye < ea.ac$

$$\text{mithin } cy > cb \text{ und } cy < ca$$

Der Punkt y liegt also zwischen a, b.

$$\text{Ferner ist } yc:cb = ae:ey$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} yc-cb \\ by \end{matrix}\right\} : cy = \left\{\begin{matrix} ae-ey \\ ay \end{matrix}\right\} : ae$$

$$\text{also } ay.yc = ae.by$$

$$\text{mithin } d.by:ay.yc = d.by:ae.by$$
$$= d:ae$$
$$= p:q$$

welches Buch 1. Aufgabe III, Fall 2. ist.

Zus. 3. Es ist also $d.bx:ax.xc = d.by:ay.yc$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} d.bx:d.by \\ bx:by \end{matrix}\right\} = ax.xc:ay.yc$$

und es läſst sich, wenn auf einer geraden Linie vier Punkte a, y, b, c gegeben sind, auf der Verlängerung derselben ein fünfter x finden, so daſs

$$bx:by = ax.xc:ay.yc.$$

Fall 3. (Fig. 25. 26. 27.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daſs $d.cx:ax.xb = p:q$.

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, und es sey $p:q = d:ae$, so ist $d.cx:ax.xb = d:ae$

$$= d.cx:ae.cx$$

$$\text{also } ax.xb = ae.cx$$

$$\text{folglich } bx:xc = ea:ax$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} bx-xc \\ bc \end{matrix}\right\}:bx = \left\{\begin{matrix} ea-ax \\ ex \end{matrix}\right\}:ae$$

$$\text{mithin } bx.xe = bc.ae$$

Es sind aber bc (hyp.), ae (Dat. 2) gegeben, also ist auch $bc.ae$, somit $bx.xe$ gegeben. Es ist aber auch $bx+xe = ae-ab = eb$ gegeben, folglich ist bx (Dat. 86), somit der Punkt x gegeben.

Determination.

Zufolge El. II. 5 mufs seyn $bc.ae \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} \begin{cases} \frac{1}{4} be^2 \\ bh^2, \text{ wenn } bh=he; \end{cases}$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} bc.ae-bc.ce \\ bc.ca \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} \begin{cases} bh^2-bc.ce \\ ch^2 \end{cases}$$

$$\text{und } 2\sqrt{bc.ca} \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} 2ch$$

$$\text{also auch } ac+cb+2\sqrt{bc.ca} \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} \begin{cases} ac+cb+\begin{cases} 2ch \\ ce-cb \end{cases} \\ ac+ce \\ ae \end{cases}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} d:ae \\ p:q \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} d : ac+cb+2\sqrt{bc.ca}$$

Construction.

Man nehme $ad=d$, $dap=daq=R$, $ap=p$, $aq=q$, $qe=dp$, $abg=R=aef$, $bg=bc$, $ef=ea$ und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis, welcher der verlängerten ac in dem gesuchten Punkte begegnen wird.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} p:q \\ d:ae \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} d:ac+cb+2\sqrt{ac.cb} \text{ (Determ.)}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} ae \\ ac+ce \\ ac+cb+ce-cb \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} ac+cb+2\sqrt{ac.cb}$$

$$\text{mithin } 2\sqrt{ac.cb} \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} \begin{cases} ce-cb \\ 2ch, \text{ wenn } bh=he, \end{cases}$$

$$\text{und } ac.cb \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} ch^2$$

folglich $\left.\begin{array}{r} ac.cb+bc.ce \\ ae.cb \\ ef.bg \end{array}\right\} \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \left\{\begin{array}{l} ch^2+bc.ce \\ bh^2 \\ {}^1/_4\, be^2 \end{array}\right.$

also berührt der über gf beschriebene Kreis die be in ihrem Halbirungspunkte h (Fig. 26), oder schneidet sie (Fig. 27.).

Im ersten Fall ist $\left.\begin{array}{r} bg.ef \\ bc.ea \end{array}\right\} = bh^2$

also $bc : bh = hb : ea$

Nun ist $bh < ae$, also auch $bc < bh$

und $bh : \left\{\begin{array}{c} bh-bc \\ ch \end{array}\right\} = ea : \left\{\begin{array}{c} ea-bh \\ ah \end{array}\right.$

folglich $ah.hb = ae.ch$

mithin $d.ch : ah.hb = d.ch : ae.ch$

$= d : ae$

$= p : q.$

Im zweiten Fall ist $bx.xe = bg.ef$

$= bc.ae$

also $bc : bx = xe : ea$

Es ist aber $xe < ea$, folglich auch $bc < bx$,

und $bx : \left\{\begin{array}{c} xb-bc \\ cx \end{array}\right\} = ae : \left\{\begin{array}{c} ea-ex \\ ax \end{array}\right.$

folglich $ax.xb = ae.cx$

mithin $d.cx : ax.xb = d.cx : ae.cx$

$= d : ae$

$= p : q.$

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt von be bestimmt ein grösseres Verhältniss, als jeder andere

Punkt der verlängerten ac. Von zwey auf einerley Seite des Halbirungspunktes liegenden Punkten bestimmt der nähere ein grösseres Verhältniſs, als der entferntere.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit be beweist man eben so, wie für x, daſs $d.cy : ay.yb = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $d.cx : ax.xb = d.cy : ay.yb$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} d.cx : d.cy \\ cx : cy \end{matrix}\right\} = ax.xb : ay.yb$$

Und es läſst sich auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, ein fünfter x auf der Verlängerung von ac finden, so daſs $cx : cy = ax.xb : ay.yb$.

Aufgabe V. (Fig. 28—43.)

Auf einer geraden Linie, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, zwischen zweyen derselben einen vierten x zu finden, so daſs das Verhältniſs des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen jener Punkte zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 28—32.)

Der Punkt x soll zwischen b, c angegeben werden, so daſs $ax.xb : cx^2 = p : q$.

a) Das gegebene Verhältniſs ist das der Gleichheit. (Fig. 28.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs $ax.xb = cx^2$,

$$\text{so ist auch } ax : xc = cx : xb$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} ax+xc \\ ac \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} cx+xb \\ bc \end{matrix}\right\} = ax : xc$$

Nun sind ac, cb (hyp.) gegebene gerade Linien, also ist das Verhältniſs von ac : cb (Dat. 1.), und auch das ihm gleiche von ax : xc gegeben. Es ist aber auch ax + xc = ac gegeben (hyp.), folglich (Dat. 8.) auch ax, somit der Punkt x.

Construction.

Man mache cad = R = bce, ad = ac, ce = cb und ziehe de. Der Durchschnitt der Linien ac, de ist der verlangte Punkt.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} ad : ce \\ ac : cb \end{matrix}\right\} = ax : xc \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{Es ist aber } ac > ax$$

$$\text{also auch } bc > cx$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} ac-ax \\ cx \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} bc-cx \\ bx \end{matrix}\right\} = ax : xc$$

$$\text{also } ax.xb = cx^2$$

b) das gegebene Verhältniſs ist ein Verhältniſs der Ungleichheit. (Fig. 29. 30. 31.)

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, und man gedenke sich ax.xb = cx.xg, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xb \\ cx.xg \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} cx^2 \\ \\ gx : xc \end{matrix}\right\} = p : q.$

Ferner ist sowohl

$$\begin{aligned} gx : xb &= ax : xc, & \text{als } bx : xc &= gx : xa \\ &= ax+xg : bx+xc & &= bx+xg : cx+xa \\ &= ag : bc & &= bg : ac \end{aligned}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} gx : xc \\ p : q \end{matrix}\right\} = ag . gb : ac . cb,$$

Also ist (Dat. 8.) $ag.gb$ gegeben. Es ist aber auch $ag - gb = ab$ gegeben, also ist (Dat. 85) ag, somit der Punkt g, und da $gx : xc$ gegeben ist, und $gx - xc = cg$ oder $cx - gx = cg$ gegeben ist, je nachdem $ag \gtreqless ac$, auch gx, somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man mache $acq = R$, $cq = q$, $qp = p$, $pf \mathbin{\#} qb$, $abe = R = bad$, $be = bf$, $ad = ac$, beschreibe über de als Durchmesser einen Kreis, welcher bc, oder ihre Verlängerung in g schneide, ziehe pg und $qx \mathbin{\#} pg$. Der gesuchte Punkt ist x.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ag.gb &= ad.be \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ac.bf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } ag.gb : ac.cb &= ac.bf : ac.cb \\ &= fb : bc \\ &= pq : qc \\ &= gx : xc \end{aligned}$$

Ist nun $p < q$, so ist sowohl $bf < bc$ (Fig. 29), als auch $ag.gb < ac.cb$, also $ag < ac$, folglich auch

$$ag.gb < ac.gb$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{c} ag.gb : ac.cb \\ gx : xc \end{array}\right\} < \left\{\begin{array}{c} ac.gb : ac.cb \\ gb : bc \end{array}\right.$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{c} cx - xg \\ cg \end{array}\right\} : gx > \left\{\begin{array}{c} cb - bg \\ cg \end{array}\right\} : gb$$

$$\text{folglich } gx < gb,$$

also liegt x zwischen b, c.

Ist aber $p > q$, so ist sowohl $bf > bc$ (Fig. 31), als auch $ag.gb > ac.cb$, folglich $ag > ac$, mithin

$$\text{auch } ag.gb > ac.gb$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{c} ag.gb : ac.cb \\ gx : xc \end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{c} ac.gb : ac.cb \\ gb : bc \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{c} gx - xc \\ gc \end{array}\right\} : cx > \left\{\begin{array}{c} gb - bc \\ gc \end{array}\right\} : cb$$

$$\text{mithin } cx < cb.$$

Also liegt x zwischen b, c.

Ferner ist das Verhältniſs von $gx : xc$ aus den Verhältnissen $ag : bc$ und $bg : ac$ zusammen gesetzt. Mithin verhält sich, wenn α die vierte geometrische Proportionallinie zu ag, bc, gx ist,

$$gx : \alpha = ag : bc \qquad \text{und } \alpha : cx = bg : ac$$

$$= \left\{\begin{array}{c} ag - gx \\ ax \end{array}\right\} : bc - \alpha \qquad = bg - \alpha : \left\{\begin{array}{c} ac - cx \\ ax \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } gx : xc = bg - \alpha : bc - \alpha$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{c} cx - xg \\ cg \end{array}\right\} : cx = \left\{\begin{array}{c} bc - bg \\ cg \end{array}\right\} : bc - \alpha \text{ (Fig. 29)}$$

$$\text{und } gx - xc : cx = \left\{\begin{array}{c} bg - bc \\ cg \end{array}\right\} bc - \alpha \text{ (Fig. 31)}$$

$$\text{mithin ist } \left.\begin{array}{r} cx \\ bc-bx \end{array}\right\} = bc-\alpha$$

$$\text{also } bx = \alpha$$

$$\text{Folglich ist } gx : xb = ax : \left\{\begin{array}{l} bc-bx \\ cx \end{array}\right.$$

$$\text{also } ax.xb = cx.xg$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } ax.xb : cx^2 &= cx.xg : cx^2 \\ &= gx : xc \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt h des Kreises mit ac in ihrer Verlängerung hat man, nachdem $qy \pm ph$ gezogen worden ist,

$$\begin{aligned} ah.hb &= ad.be \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ac.bf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } ah.hb : ac.cb &= ac.bf : ac.cb \\ &= fb : bc \\ &= pq : qc \\ &= hy : yc. \end{aligned}$$

Also ist das Verhältniſs $hy : yc$ aus den Verhältnissen $ah : cb$, $bh : ac$ zusammen gesetzt. Bezeichnet man die vierte geometrische Proportionallinie zu ah, cb, hy mit α, so ist mithin $hy : \alpha = ah : bc$.

$$\alpha : cy = bh : ac. \text{ Also ist}$$

$$\text{(Fig. 29) } hy : \alpha = \left\{\begin{array}{c} ah+hy \\ ay \end{array}\right\} : bc+\alpha \text{ und } \alpha : cy = \alpha - bh : \left\{\begin{array}{c} cy-ac \\ ay \end{array}\right.$$

$$\text{also } hy : cy = \alpha - bh : bc+\alpha$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{c} cy-yh \\ ch \end{array}\right\} : cy = \left\{\begin{array}{c} cb+bh \\ ch \end{array}\right\} : bc+\alpha$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} cy \\ cb+by \end{matrix}\right\} = bc+\alpha$$

$$\text{also } by = \alpha$$

$$\text{folglich } hy : yb = ay : \left\{\begin{matrix} bc+by \\ cy \end{matrix}\right\}$$

$$\text{mithin } hy.yc = ay.yb.$$

$$\text{(Fig. 31) } hy : \alpha = \left\{\begin{matrix} hy-ah \\ ay \end{matrix}\right\} : \alpha-bc \text{ und } \alpha : cy = \alpha+bh : \left\{\begin{matrix} cy+ac \\ ay \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } hy : yc = \alpha+bh : \alpha-bc$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} hy-yc \\ hc \end{matrix}\right\} : cy = \left\{\begin{matrix} bh+bc \\ ch \end{matrix}\right\} : \alpha-bc$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} cy \\ by-bc \end{matrix}\right\} = \alpha-bc$$

$$\text{also } by = \alpha$$

$$\text{folglich } hy : yc = ay : \left\{\begin{matrix} by-bc \\ cy \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } hy.yb = ay.yb$$

$$\begin{aligned} \text{somit (Fig 29 und 31) } ay.yb : cy^2 &= hy.yc : cy^2 \\ &= hy : yc \\ &= p : q \end{aligned}$$

welches Buch 1. Aufg. IV. Fall 3. ist.

Zus. 3. Es ist also $ax.xb : cx^2 = ay.yb : cy^2$

$$\text{folglich } ax.xb : ay.yb = cx^2 : cy^2$$

und es läſst sich, wenn auf einer geraden Linie vier Punkte $\left\{\begin{matrix} y,\ a,\ b,\ c \text{ (Fig. 29)} \\ a,\ b,\ c,\ y \text{ (Fig. 31)} \end{matrix}\right\}$ gegeben sind, zwischen b, c ein fünfter x finden, so daſs

$$ax.xb : ay.yb = cx^2 : cy^2.$$

Simsons andere Auflösung (Fig. 32).

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, so dafs also

$$ax \cdot xb : cx^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich über ab als Durchmesser einen Kreis beschrieben, und von x an denselben die Tangente xh gelegt, so ist $hx^2 = ax \cdot xb$ (El. III. 36), folglich ist auch $hx^2 : cx^2 = p:q$, also $hx^2 : cx^2$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, mithin auch (Dat. 58) hx : xc einem gegebenen gleich. Es sey dh gezogen, und hx verlängert bis zum Durchschnitt g mit einem in c auf bc errichteten Perpendikel, so wird $\Delta\, dhx \backsim \Delta\, xcg$ (El. VI. 4),

also $hx : xc = dh : cg$,

mithin ist auch dh : cg einem gegebenen Verhältnisse gleich. Da aber $dh = \frac{1}{2}ab$ gegeben ist, so ist auch (Dat. 2) cg, und der Punkt g, somit die Lage der von g an den über ab beschriebenen Kreis gezogenen Tangente (Dat. 94), und ihr Durchschnitt x mit bc gegeben.

Construction.

Man nehme $cp = p$, $cq = q$, beschreibe über pq als Durchmesser einen Kreis, mache $bcg = R$, verlängere cg, wenn es nöthig ist, bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in e, nehme $cf = \frac{1}{2}ab$, $fg \perp ep$, beschreibe über ab als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt d, und lege an denselben die Tangente hg. Der Durchscnitt derselben mit bc ist der verlangte Punkt.

Beweis.

Zieht man dh, so ist $\Delta\, dhx \backsim \Delta\, xcg$ (El. VI. 4.)

$$\text{also } hx : xc = \left\{\begin{array}{l} dh : cg \\ cf : cg \\ cp : ce \text{ (El. VI. 2.)} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{folglich } hx^2 \\ \text{(El.III.36.)} ax.xb \end{array}\right\} : xc^2 = cp^2 : ce^2 \text{ (El. VI. 22.)}$$
$$= cp : cq \text{ (El.VI. 20. Zus. 2)}$$
$$= p : q.$$

Zus. Zieht man von g die zweite Tangente gk an den über ab beschriebenen Kreis, und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt mit der verlängerten ca, so ist, wenn dk gezogen wird,

$$\Delta dky \sim \Delta ycg \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{also } ky : yc = \left\{\begin{array}{l} dk : cg \\ cf : cg \\ cp : ce \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{folglich } ky^2 \\ \text{(El. III. 36.)} ay.yb \end{array}\right\} : yc^2 = cp^2 : ce^2 \text{ (El. VI. 22.)}$$
$$= cp : qq \text{(El.VI.20.Zus.2)}$$
$$= p : q.$$

Anmerkung. Diese Auflösung rührt eigentlich von Roger Ventemiglia her, und findet sich in der geometrischen Analysis von Hugo de Omerique, Cadix 1698, pag. 256. Sie ist der von Alexander Anderson in seinem Apollonius redivivus vorzuziehen.

Fall II. (Fig. 33. 34. 35. 36.)

Der Punkt x soll zwischen b, c so angegeben werden, dafs $ax.xc : bx^2 = p : q$.

a) Insbesondere, das gegebene Verhältnifs sey ein Verhältnifs der Gleichheit. (Fig. 33.)

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, so dafs also $ax.xc = bx^2$,

so ist mithin $ax : xb = bx : xc$

Da $ax > xb$, so wird auch $bx > xc$. Macht man also $fx = bx$, so ist auch $fx > xc$, und man hat,

$$\text{da } ax : xb = fx : xc$$

$$\text{auch } \left.\begin{matrix} ax - xb \\ ab \end{matrix}\right\} : bx = \left\{\begin{matrix} fx - xc \\ fc \end{matrix}\right\} : cx$$

$$\text{also } ab : cf = bx : xc$$

$$= \left\{\begin{matrix} 2xb \\ bf \end{matrix}\right\} : 2xc$$

$$= \left\{\begin{matrix} ab + bf \\ af \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} fc + 2xc \\ fx + xc \\ bc \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } ab \cdot bc = af \cdot fc.$$

Nun sind ab, bc gegeben (hyp.), also ist auch $ab \cdot bc$, somit $af \cdot fc$ gegeben. Es ist aber auch $af \cdot fc$ gegeben, folglich ist (Dat. 85) af, somit der Punkt f, also auch bf, und $bx = \frac{1}{2} bf$, also der Punkt x gegeben.

Construction.

Man nehme $bad = R = bce$, $ad = ab$, ziehe db und verlängere sie bis zum Durchschnitt mit ce in e, beschreibe über de als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ac in f schneide. Der Halbirungspunkt x von bf wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \triangle bce \sim \triangle bad \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{also } ba : ad = bc : ce.$$

$$\text{Es ist aber } ba = ad$$

$$\text{also auch } bc = ce.$$

Ferner ist $af \cdot fc = ad \cdot ce$ (Lehns. A.)

$$= ab \cdot bc$$

$$\text{also } ba : af = fc : cb.$$

Es ist aber $ab < af$

$$\text{also auch } fc < cb$$

$$\text{und } \left.\begin{array}{l} fc+cb \\ bf \end{array}\right\} < 2cb$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}bf \\ bx \end{array}\right\} < cb$$

Also liegt der Punkt x zwischen b, c.

Endlich ist $ab : fc = af : bc$

$$= \left\{\begin{array}{l} fa-ab \\ bf \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} bc-cf \\ 2cx \end{array}\right.$$

$$= bx : xc$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} ab+bx \\ ax \end{array}\right\} : xb = \left\{\begin{array}{c} fc+cx \\ fx \\ bx \end{array}\right\} : xc$$

$$\text{mithin } ax \cdot xc = bx^2.$$

Zus. 1. Für den zweiten Durchschnitt g des Kreises mit der verlängerten ca

$$\text{ist } ag \cdot gc = ad \cdot ce$$

$$= ab \cdot bc$$

$$\text{also } ab : ag = gc : cb$$

Nun ist $gc > cb$

$$\text{also auch } ab > ag$$

$$\text{folglich } 2ab > \left\{\begin{array}{l} ba+ag \\ bg \end{array}\right.$$

$$\text{und } ab > \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}bg \\ by \end{array}\right.$$

also liegt y zwischen a, b.

Ferner ist $ab : cg = ag : bc$

$$= \left\{\begin{matrix} ba + ag \\ bg \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} bc + cg \\ 2cy \end{matrix}\right\}$$

$$= by : yc$$

---

also $ab : by = gc : cy$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} ab - by \\ ay \end{matrix}\right\} : yb = \left\{\begin{matrix} gc - cy \\ gy \\ by \end{matrix}\right\} : yc$$

---

folglich $ay : yc = by^2$.

Zus. 2. (Sims.) Wenn $ab = bc$, so ist (El. II. 5.)

$$\left.\begin{matrix} ax \cdot xc \\ bx^2 \end{matrix}\right\} + bx^2 \left.\begin{matrix} \\ 2bx^2 \end{matrix}\right\} = ab^2 \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} ay \cdot yc \\ by^2 \end{matrix}\right\} + by^2 \left.\begin{matrix} \\ 2by^2 \end{matrix}\right\} = ab^2$$

---

also $bx^2 = \frac{1}{2} ab^2$ und $by^2 = \frac{1}{2} ab^2$

welches eine einfache Construction für x, y zur Hand giebt.

Zus. 3. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte der Φ bc bestimmen Rechtecke, welche grösser sind, als die dadurch bestimmten Quadrate.

b) Allgemein, das gegebene Verhältniſs ist ein Verhältniſs der Gleichheit, oder Ungleichheit. (Fig. 34. 35.)

α) Insbesondere sey $ab = bc$ (Fig. 34.).

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x,

Construction.

Man mache $abd = R = ace$, $bd = ba$, $ce = ca$, ziehe ed, und beschreibe über ed als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie bc in f begegne. Der Halbirungspunkt x von af ist der verlangte.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{matrix} ba.ac \\ bd.ce \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix}$ $\frac{1}{4}bc^2$ (Determ.), folglich berührt oder schneidet der über de beschriebene Kreis die Linie bc. (Lehns.B) Es geschehe das Berühren (Fig.37), das Schneiden (Fig. 38), in f. Es ist in beiden Fällen

$$ba.ac = bf.fc \text{ (Lehns. B.)}$$

$$\text{also } ac:bf = fc:ba \text{ (El. VI. 14.)}$$
$$\text{Nun ist } ac > fc$$

$$\text{also ist auch } bf > ba$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} ab+bf \\ af \\ 2ax \end{matrix}\right\} > 2ab$$

folglich $ax > ab$. Also liegt der Punkt x zwischen b, c.

$$\text{Es ist ferner } \left.\begin{matrix} ac-cf \\ af \\ 2ax \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} fb-ba \\ 2bx \end{matrix}\right\} = fc:ba$$

$$\begin{aligned} \text{also } ax:xb &= fc:ab \\ &= fc+ax:ab+bx \\ &= cx:ax \end{aligned}$$

$$\text{mithin } bx.xc = ax^2.$$

Zus. 1. Der (Fig. 37) durch den Halbirungspunkt von bc bestimmte Punkt x bedingt ein grösseres

Es ist aber $aq > qd$

also auch $ab > by$. Mithin liegt y zwischen a, b.

Ferner ist $ab^2 : by^2 = aq^2 : qd^2$

$$= aq : qp$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{c} ab^2 - by^2 \\ ay \cdot yc \end{array}\right\} : by^2 = \left\{\begin{array}{c} aq - qp \\ ap \end{array}\right\} : qp$$

$$= p : q$$

β) Allgemein sey $ab \left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\} bc$. (Fig. 35.)

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, so daſs also

$$ax \cdot xc : bx^2 = p : q$$

Man gedenke sich $ax \cdot xc = bx \cdot xg$, folglich sowohl

$gx : xc = ax : xb$, als $cx : xb = gx : xa$,

$$= \left\{\begin{array}{c} ax + xg \\ ag \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} bx + xc \\ bc \end{array}\right\} \qquad = \left\{\begin{array}{c} gx - xc \\ gc \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} ax - xb \\ ab \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{so ist } gx : xb \\ \left.\begin{array}{c} bx \cdot gx \\ ax \cdot xc \end{array}\right\} : bx^2 \\ \qquad p : q \end{array}\right\} = ag \cdot gc : ab \cdot bc$$

folglich ist das Verhältniſs von $ag \cdot gc : ab \cdot bc$ einem gegebenen gleich, also selbst gegeben. Es ist aber auch $ab \cdot bc$ gegeben, also auch $ag \cdot gc$ folglich da $ag - gc = ac$ gegeben ist, ag, (Dat. 85) und der Punkt g gegeben, und da $gx : xb$ und gb gegeben sind, auch bx (Dat. 8.) und x gegeben.

Construction.

Man nehme $abp = R$, $bq = q$, $qp = p$, $pd \perp aq$, $dqe = R = bcf$, $ae = ad$, $cf = cb$, beschreibe über fe als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte bc in g schneide, und ziehe $qx \perp pq$. Der Punkt x wird der verlangte seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ag.gc &= ae.cf \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ad.bc \end{aligned}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} ad.bc:ab.bc \\ ad:ab \\ qp:qb \\ gx:xb \end{array}\right\} = ag.gc:ab.bc$$

$$\text{Es ist } ag > ab$$

$$\text{also } ag.gc > ab.gc$$

$$\text{und } \left.\begin{array}{l} ag.gc:ab.bc \\ gx:xb \end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l} ab.gc:ab.bc \\ gc:cb \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} gx+xb \\ gb \end{array}\right\} :bx > \left\{\begin{array}{l} gc+cb \\ gb \end{array}\right\} :bc$$

$$\text{mithin } bx < bc$$

also liegt x zwischen b, c.

Ferner ist das Verhältniſs von $gx:xb$ aus den Verhältnissen $ag:bc$ und $gc:ab$ zusammengesetzt. Es verhält sich also, wenn α die vierte geometrische Proportionallinie zu ag, bc, gx bezeichnet,

$$\begin{aligned} gx:\alpha &= ag:bc & \text{und } \alpha:bx &= cg:ab \\ &= ag-gx:bc-\alpha & &= cg+\alpha:ab+bx \\ &= ax:bc-\alpha & &= cg+\alpha:ax \end{aligned}$$

$$\text{also } gx:xb = cg+\alpha:bc-\alpha$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} gx+xb \\ gb \end{matrix}\right\} : bx = \left\{\begin{matrix} gc+cb \\ gb \end{matrix}\right\} : bc-\alpha$$

$$\text{mithin ist } \left.\begin{matrix} bx \\ bc-cx \end{matrix}\right\} = bc-\alpha$$

$$\text{also } cx = \alpha$$

$$\text{folglich } gx:xc = ax : \left\{\begin{matrix} bc-cx \\ bx \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } ax.xc = bx.xg$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } ax.xc : bx^2 &= bx.xg : bx^2 \\ &= gx : xb \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte von bc bestimmen gröſsere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den durch den zweiten Durchschnitt h des Kreises mit der verlängerten ca zwischen a, b eben so bestimmten Punkt y, wie x durch g zwischen b, c bestimmt wurde, läſst sich auf gleiche Weise darthun, daſs $ay.yc:by^2 = p:q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xc:bx^2 = ay.yc:by^2$

$$\text{folglich } ax.xc:ay.yc = bx^2:by^2$$

Es läſst sich demnach, wenn auf einer geraden Linie vier Punkte a, y, b, c bestimmt sind, ein fünfter x zwischen b, c finden, so daſs

$$ax.xc:ay.yc = bx^2:by^2.$$

Simsons andere Auflösung. (Fig. 36).

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x. Ueber ac sey ein Halbkreis beschrieben, und in x ein Perpendikel xf auf ax errichtet, welches bis zum Durchschnitt f mit dem Halbkreise verlängert werde. Da nun $ax . xc : bx^2 = p : q$, so ist auch (El. VI. 8, und 17.) $fx^2 : bx^2 = p : q$, folglich $fx^2 : bx^2$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, somit auch das Verhältniſs von $fx : bx$ gegeben (Dat. 58). Es ist aber auch $fxb = R$, folglich (Dat. 44.) das Dreieck fbx der Art nach, somit der Winkel fbx, mithin bf der Lage nach (Dat. 32.), also auch der Durchschnitt f der Linie bf mit dem gleichfalls der Lage nach gegebenen Halbkreise gegeben (Dat. 28.), und da $fxb = R$, auch der Punkt x gegeben (Dat. 33.).

Construction.

Man mache $bap = R = baq$, $ap = p$, $aq = q$, beschreibe über pq als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ba in d schneide, ziehe dp und $bf \perp dp$. Fällt man vom Durchschnitt f mit dem Kreise ein Perpendikel fx auf ac, so ist x der gesuchte Punkt.

Beweis.

Es ist $\overbrace{fx : xb = pa : ad}$ (El. VI. 4.)

$$\left.\begin{array}{l} fx^2 \\ ax . xc \end{array}\right\} : xb^2 = pa^2 : ad^2 \text{ (El. VI. 22.)}$$

$$= pa : aq \text{ (El. VI. 20. Zus. 2.)}$$

$$= p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Zieht man von dem zweiten Durchschnitte e des über pq beschriebenen Kreises mit cd eine gerade Linie nach p und $bg \perp ep$, auch von dem Durchschnitte g dieser Linie mit dem über ac beschriebenen Halbkreise ein Perpendikel gy auf ac, so ist $gy^2 : yb^2 = pa^2 : ac^2$

$= pa : aq$

$= p : q.$

Anmerkung. Diese Auflösung rührt von Alexander Anderson her. Man sehe dessen Apollonius redivivus pag. 22 des Supplementes.

Fall 3. (Fig. 37—42.)

Der Punkt x soll zwischen b, c so bestimmt werden, daſs $bx . xc : ax^2 = p : q$.

a) Das gegebene Verhältniſs ist ein Verhältniſs der Gleichheit. (Fig. 37. 38.)

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, so ist $bx . xc = ax^2$

also $cx : xa = ax : xb$

folglich $cx - xa : ax = ax - xb : bx$,

oder, wenn $fx = ax$ gemacht wird, $cf : ax = ab : bx$

also $cf : ab = ax : xb$

$= 2ax : 2bx$

$= 2ax + cf : 2bx + ab$

$= ac : bf$

mithin $bf . fc = ba . ac$. (El. VI. 16.)

Nun sind ac, ab gegeben (hyp.), folglich ist ac . ab, somit auch bf . fc gegeben. Es ist aber auch $bf + fc = bc$ gegeben, folglich (Dat. 86.) bf, und der Punkt f, mithin auch af, und $ax = \frac{1}{2} af$, also der Punkt x gegeben.

Determination.

Vermöge (El. II, 5.) muſs seyn $ba . ac \overset{=}{<} \frac{1}{4} bc^2$

ten Punkt x zu finden, so daſs das Verhältniſs des Rechtecks aus den Segmenten zwischen x und zweyen jener Punkte zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 43, 44.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daſs

$$ax \cdot xb : cx^2 = p : q.$$

Analysis.

Es sey derselbe so gefunden, daſs $ax \cdot xb : cx^2 = p : q$. Gedenkt man sich den Punkt g so bestimmt, daſs $cx \cdot xg = ax \cdot xb$, wobey $gx > ax$ werden muſs, weil $bx > cx$, so ist $\left.\begin{matrix} cx \cdot xg : cx^2 \\ gx : cx \end{matrix}\right\} = p : q$. Ferner ist sowohl $gx : ax = bx : cx$, als $ax : cx = gx : bx$

$$= gx - xb : ax - xc \qquad = gx - xa : bx - xc$$

$$= gb : ac \qquad = ga : bc$$

folglich $\left.\begin{matrix} gx : xc \\ p : q \end{matrix}\right\} = ag \cdot gb : ac \cdot cb.$

Es ist also $ag \cdot gb : ac \cdot cb$ ein gegebenes Verhältniſs, und da $ac \cdot cb$ gegeben ist, ist $ag \cdot gb$ gegeben (Dat. 2). Da auch $bg - ga = ab$ gegeben ist, ist ag (Dat. 85), somit g, und da $gx : xc$ gegeben ist, auch gx und der Punkt x gegeben.

Determination.

Da für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ac sowohl $ax > cx$, als $bx > cx$, so ist $ax \cdot xb > cx^2$, also muſs auch $p > q$ seyn.

Construction.

Man mache $acp = R = ac\pi$, $cq = q$, $qp = q\pi = p$, $pd + ac$, $dae = R = abf$, $ae = ad$, $bf = bc$, beschreibe über der geraden Linie fe als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ca in g schneide, und ziehe $qx \perp g\pi$. Der gesuchte Punkt wird x seyn.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{array}{l} ae.bf \\ ad.bc \end{array}\right\} = ag.gb$ (Lehns. A.)

also $\left.\begin{array}{l} ad.bc:ac.cb \\ da:ac \\ pq:qc \\ \pi q:qc \\ gx:xc \end{array}\right\} = ag.gb:ac.cb$

Folglich ist das Verhältniſs von $gx:xc$ aus den Verhältnissen $gb:bc$ und $ag:bc$ zusammengesetzt, und wenn α die vierte geometrische Proportionallinie zu ag, bc, gx bezeichnet,

ist $gx:\alpha = gb:ac$ und $\alpha:cx = ag:bc$

$= \left\{\begin{array}{l} gx-gb \\ bx \end{array}\right\} : \alpha - ac$ $= ga+\alpha : \left\{\begin{array}{l} bc+cx \\ bx \end{array}\right.$

folglich $gx:xc = ga+\alpha : \alpha - ac$

und $\left.\begin{array}{l} gx-xc \\ cg \end{array}\right\} : cx = \left\{\begin{array}{l} ga+ac \\ cg \end{array}\right\} : \alpha - ac$

also $\left.\begin{array}{l} cx \\ ax-ac \end{array}\right\} = \alpha - ac$

mithin $ax = \alpha$

somit $gx:ax = bx : \left\{\begin{array}{l} ax-ac \\ cx \end{array}\right.$

folglich $ax.xb = gx.xc$

mithin $ax.xb:cx^2 = gx.xc:cx^2$
$= gx:xc$
$= p:q.$

Zus. 1. (Sims.) Die auf der verlängerten ac näher bey c liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Zieht man den Punkt π mit dem zweiten Durchschnitte k des über ef beschriebenen Kreises mit der verlängerten ab durch eine gerade Linie zusammen, und nimmt $qy \perp k\pi$, so ist

$$\left.\begin{array}{l} ae \cdot bf \\ ad \cdot bc \end{array}\right\} = ak \cdot kb$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} ad \cdot bc : ac \cdot cb \\ da : ac \\ \pi q : qc \\ ky : yc \end{array}\right\} = ak \cdot kb : ac \cdot cb$$

Es ist aber $pq > qc$,

folglich auch $ak \cdot kb > ac \cdot cb$

also $ak > ac$

mithin $ak \cdot kb > ac \cdot kb$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} ak \cdot kb : ac \cdot cb \\ ky : yc \end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l} ac \cdot kb : ac \cdot cb \\ kb : bc \end{array}\right.$$

$$\text{und } \left.\begin{array}{l} ky + yc \\ kc \end{array}\right\} : cy > \left\{\begin{array}{l} kb + bc \\ kc \end{array}\right\} : cb$$

also $cy < cb$.

Ferner ist das Verhältniſs von $ky : yc$ aus den Verhältnissen $bk : ac$ und $ak : bc$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionallinie zu bk, ac, ky bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{ll} ky : \alpha = bk : ac & \text{und } \alpha : yc = ak : bc \\ \quad = bk - ky : ac - \alpha & \quad = ak - \alpha : bc - cy \\ \quad = by : ac - \alpha & \quad = ak - \alpha : by \end{array}$$

folglich $ky : yc = ak - \alpha : ac - \alpha$

also $\left.\begin{matrix} ky - yc \\ ck \end{matrix}\right\} : cy = \left\{\begin{matrix} ak - ac \\ ck \end{matrix}\right\} : ac - \alpha$

mithin $\left.\begin{matrix} cy \\ ac - ay \end{matrix}\right\} = ac - \alpha$

demnach $ay = \alpha$

und $ky : ay = by : \left\{\begin{matrix} ac - ay \\ cy \end{matrix}\right.$

also $ay . yb = ky . yc$

und $ay . yb : cy^2 = ky . yc : cy^2$
$= ky : yc$
$= p : q$, welches Buch 1, Aufg. V. Fall 1. ist.

Zus. 3. Es is mithin $ax . xb : cx^2 = ay . yb : cy^2$

also auch $ax . xb : ay . yb = cx^2 : cy^2$.

Und man kann auf der Verlängerung einer geraden Linie ac, in welcher vier Punkte a, b, y, c gegeben sind, einen fünften x finden, so dafs $ax . xb : ay . yb = cx^2 : cy^2$.

Simsons andere Auflösung. (Fig. 44.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs $ax . xb : cx^2 = p : q$. Beschreibt man über a b einen Halbkreis, und zieht an denselben die Tangente hx, so ist $hx^2 = ax . xb$

also $hx^2 : cx^2 = p : q$

folglich das Verhältnifs von $hx^2 : cx^2$, somit auch (Dat. 58.) das von $hx : cx$, also auch, wenn dh gezogen, und $gcx = R$ gemacht wird, das von $dh : gc$ (El. VI. 4.) gegeben. Es ist aber $dh = \frac{1}{2} ab$ gegeben, folglich (Dat. 2.) auch cg, und der Punkt g, somit auch (Dat. 94.) die Lage der Tangente gh, und ihr Durchschnitt x mit der verlängerten ac.

Determination.

Da für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ac sowohl $ax > cx$, als $bx > cx$, so ist auch $ax . xb > cx^2$, folglich muſs $p > q$ seyn.

Construction.

Man nehme $ade = R = adp$, $dp = p$, $pq = q$, $pqf = R$, beschreibe über dp als Durchmesser einen Halbkreis, welcher der qf in f begegne, ziehe pf, mache $pm = pf$, $pk \doteq mc$, ziehe ke, welche dem in c auf ac errichteten Perpendikel in g begegne, und lege von g die Tangente gh an den über ab beschriebenen Kreis. Der Durchschnitt x der Verlängerung derselben mit der verlängerten ac wird der verlangte seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } de:gc &= dk:kc \\ &= dp:pm \\ &= dp:pf \end{aligned}$$

Nun ist $dp > pf$ (Determ.)

also auch $ae > gc$

folglich begegnet die Tangente gh der verlängerten ac.

Ferner ist $\Delta\, dhx \backsim \Delta\, gcx$

$$\begin{aligned} \text{also } hx:xc &= dh:gc \\ &= de:gc \\ &= dp:pf \end{aligned}$$

$$\text{folglich auch } \left.\begin{array}{l} hx^2 \\ ax.xb \end{array}\right\} \begin{array}{l} : cx^2 = dp^2 : pf^2 \\ = dp : pq \\ = p : q. \end{array}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Zieht man von g auch die zweite Tangente gl an jenen Kreis, welche die ac in y zwischen b, c schneide, so ist, wenn dl gezogen wird,

$$\Delta\, dly \backsim \Delta\, gcy$$

$$\begin{aligned} \text{also } ly : yc &= dl : gc \\ &= de : gc \\ &= dp : pf \end{aligned}$$

$$\text{folglich auch } \left.\begin{array}{l} ly^2 \\ ay.yb \end{array}\right\} \begin{array}{l} : yc^2 = dp^2 : pf^2 \\ = p : q. \end{array}$$

Fall 2. (Fig. 45.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daſs

$$bx.xc : ax^2 = p : q.$$

Analysis.

Es sey derselbe so gefunden, daſs $bx.xc : ax^2 = p : q$. Man gedenke sich den Punkt g so bestimmt, daſs $ax.xg = bx.xc$, wobey $gx < cx$ werden muſs, weil $ax > bx$. So ist $\left.\begin{array}{l} ax.xg : ax^2 \\ gx : xa \end{array}\right\} = p : q$. Ferner ist sowohl

$gx : xb = cx : xa$, als $bx : xa = gx : xc$

$= cx - xg : ax - xb$ $= bx - xg : ax - xc$

$= cg : ab$ $= bg : ac$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} gx : xa \\ p : q \end{array}\right\} = bg.gc : ba.ac.$$

Da nun das Verhältnifs von p:q und das Rechteck ba.ac gegeben sind, so ist auch das Rechteck bg.gc gegeben. Es ist aber auch bg—gc = bc gegeben, also ist (Dat. 85.) bg, somit g, und ag, und da gx:ax gegeben ist, auch x gegeben.

Determination.

Da immer bx < ax, cx < ax, so ist $bx.xc < ax^2$, also mufs p < q seyn.

Construction.

Man mache caq = R, aq = q, qp = p, pf ⫫ bq, abd = R = ace, bd = bf, ce = ca, beschreibe über ed als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ac in g schneide, und ziehe qx ⫫ pg. Der Punkt x ist der verlangte.

Beweis.

Es ist bg.gc = bd.ec (Lehns. A.)
= bf.ac

als bf.ac : ba.ac = bg.gc : ba.ac
fb : ba
pq : qa
gx : xa

Es ist aber pq < qa, also liegt q in der Verlängerung von ap, mithin auch x in der Verlängerung von ag, also auch in der Verlängerung von ac.

Das Verhältnifs von gx:xa ist aus den Verhältnissen cg : ab und bg : ac zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionallinie zu cg, ab, gx bezeichnet, so ist

$$gx : \alpha = cg : ab \quad \text{und} \quad \alpha : ax = bg : ac$$
$$= \left\{\begin{matrix} cg+gx \\ cx \end{matrix}\right\} : ab+\alpha \qquad = \alpha - bg : \left\{\begin{matrix} ax-ac \\ cx \end{matrix}\right.$$

folglich $gx : ax = \alpha - bg : ab + \alpha$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} ax - xg \\ ag \end{matrix}\right\} : ax = \left\{\begin{matrix} ab + bg \\ ag \end{matrix}\right\} : ab + \alpha$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} ax \\ ab + bx \end{matrix}\right\} = ab + \alpha$$

und $bx = \alpha$

$$\text{folglich } gx : xb = cx : \left\{\begin{matrix} ab + bx \\ ax \end{matrix}\right.$$

also $bx . xc = ax . xg$

$$\text{mithin } bx . xc : ax^2 = ax . xg : ax^2$$
$$= gx : ax$$
$$= p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die von c entfernteren Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren.

Zus. 2. Zieht man den Durchschnitt h des Kreises und der verlängerten cb mit p zusammen, und macht $qy \pm ph$, so ist $bh . hc = bf . ac$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} bf . ac : ba . ac \\ fb : ba \\ pq : qa \\ hy : ya \end{matrix}\right\} = bh . hc : ba . ac$$

Da nun $bh . hc = bf . ac$, so ist sowohl
$bh . hc < ba . ac$, als auch $bh . hc > bf . fc$

folglich $bh < ba$ und $bh > bf$
also liegt h zwischen a, f und es ist $ah < af$.

Es ist aber $ay : yh = aq : qp$
$= ab : bf$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} ay-yh:ay \\ ah:ay \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} ab-bf:ab \\ af:ab \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } ay < ab$$

Ferner ist das Verhältnifs von $hy : ya$ aus den Verhältnissen $ch : ab$ und $bh : ac$ zusammen gesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionallinie zu ch, ab, gy bezeichnet, so ist

$$hy : \alpha = ch : ab \qquad \text{und } \alpha : ay = bh : ac$$
$$= ch - hy : ab - \alpha \qquad = bh - \alpha : \left\{\begin{matrix} ac - ay \\ cy \end{matrix}\right.$$
$$= cy : ab - \alpha$$

$$\text{folglich } hy : ay = bh - \alpha : ab - \alpha$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} ay-yh \\ ah \end{matrix}\right\} : ay = \left\{\begin{matrix} ab-bh \\ ah \end{matrix}\right\} : ab-\alpha$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} ay \\ ab+by \end{matrix}\right\} = ab-\alpha$$

$$\text{also } by = \alpha$$

$$\text{folglich } hy : yb = cy : \left\{\begin{matrix} ab-by \\ ay \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } by \cdot yc = ay \cdot yh$$

$$\text{mithin } by \cdot yc : ay^2 = ay \cdot yh : ay^2$$
$$= hy : ay$$
$$= p : q.$$

welches Buch 1. Aufg. V. Fall 1. ist.

Zus. 3. Es ist also $bx \cdot xc : ax^2 = by \cdot yc : ay^2$

$$\text{mithin auch } bx \cdot xc : by \cdot yc = ax^2 : ay^2.$$

Und es läſst sich auf der Verlängerung einer geraden Linie ac, in welcher vier Punkte a, y, b, c gegeben sind, ein fünfter Punkt x finden, so daſs $bx \cdot xc : by \cdot yc = ax^2 : ay^2$.

Simsons andere Auflösung. (Fig. 46.)

Analysis.

Es sey der Punkt x so gefunden, dafs

$$bx \cdot xc : ax^2 = p : q.$$

Beschreibt man über bc einen Halbkreis, und zieht an denselben die Tangente kx, so ist $kx^2 = bx \cdot xc$ (El. III. 36), folglich $kx^2 : ax^2 = p : q$, also das Verhältnifs von $kx^2 : ax^2$, somit das von $kx : xa$ (Dat. 58) gegeben. Zieht man dk, und verlängert xk bis zum Durchschnitt mit dem in a auf ab errichteten Perpendikel, so ist (El. VI. 4)

$$kx : xa = dk : ah,$$

also auch dafs Verhältnifs von $dk : ah$, und da $dk = \frac{1}{2}ab$ gegeben ist, auch ah, somit der Punkt h, und die Lage der Tangente hk (Dat. 94), und der Durchschnitt x gegeben.

Determination.

Da für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ac sowohl bx, als cx kleiner ist, als ax, so ist auch $bx \cdot xc < ax^2$, folglich mufs auch $p < q$ seyn.

Construction.

Man beschreibe über bc als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt d sey, nehme $ade = R = adq$, $dp = p$, $dq = q$, beschreibe über pq einen Halbkreis, welcher der ac, oder ihrer Verlängerung in m begegne, mache $df = dp$, ziehe $mg \perp fe$, $gh \perp ab$, $ha \perp de$, und lege von h die Tangente hk an den über bc beschriebenen Kreis. Der Durchschnitt x der verlängerten Tangente mit der verlängerten ac wird der gesuchte Punkt seyn.

Beweis.

Es ist $pd:dm = md:dq$

Da aber $pd < dq$ (Determ.)

so ist $\left.\begin{array}{r} pd \\ df \end{array}\right\} < dm$

Es ist aber auch $fd:dm = ed:dg$

$= ed:ah$

mithin $ed < ah$. Also schneidet die Verlängerung von hk die verlängerte ac.

Zieht man dk, so ist $\Delta\, hax \backsim \Delta\, dkx$ (El.VI.4.)

folglich $kx:xa = dk:ah$

$= ed:dg$

mithin auch $\left.\begin{array}{r} kx^2 \\ bx.xc \end{array}\right\} : xa^2 = ed^2:dg^2$ (El.VI.22.)

$= fd^2:dm^2$

$= pd^2:dm^2$

$= p:q.$

Zus. 1. Zieht man von h auch die Tangente hl, welche der ab in y begegne, so ist, wenn dl gezogen wird, $\Delta\, hay \backsim \Delta\, dly$

also $ly:ya = dl:ah$

$= ed:dg$

mithin $\left.\begin{array}{r} ly^2 \\ by.yc \end{array}\right\} : ya^2 = ed^2:dg^2$

$= p:q$

Zus. 2. (Sims.) Die entfernteren Punkte der verlängerten bc bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren.

Fall 3. (Fig. 47—53.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daſs

$ax.xc : bx^2 = p:q.$

a) Es sey $p = q$. (Fig. 47.)

Analysis.

Der Punkt x sey so bestimmt, daſs $ax \cdot xc = bx^2$ so ist $ax : xb = bx : xc$

$$= ax - xb : bx - xc$$
$$= ab : bc.$$

Da ab, bc gegeben sind, so ist das Verhältniſs von $ax : xb$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, mithin, da auch $ax - xb = ab$ gegeben ist, ax (Dat. 8), und der Punht x gegeben.

Determination.

Da $ax : xb = ab : bc$, aber immer $ax > xb$ ist, so so muſs auch $ab > bc$ seyn.

Construction.

Man mache $bad = R = abe$, $ad = ab$, $be = bc$, und ziehe de, deren Verlängerung der verlängerten ac in dem gesuchten Punkte begegnen wird.

Beweis.

Es ist $ab > bc$ (Determ.), folglich auch $ad > be$, mithin begegnet die verlängerte de der verlängerten ab. Es geschehe in x, so ist $ax : xb = ad : be$

$$= ab : bc$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} ax - xb \\ ab \end{matrix}\right\} bx = ab - bc : cb$$

Es ist aber $ab > ab - bc$

also ist auch $bx > bc$,

mithin liegt x in der Verlängerung von ac.

Ferner ist $ax : xb = ax - ab : xb - bc$

$$= bx : cx$$

folglich $ax \cdot xc = bx^2$

Zus. (Sims.) Die von c weiter entfernten Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere, die näheren kleinere Verhältnisse.

b) Es sey $p<q$. (Fig. 48).

Analysis.

Der Punkt x sey so bestimmt, daſs

$$ax.xc : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich $ax.xc = bx.xg$, wobey g zwischen b, c liegen muſs, so ist $\left.\begin{matrix} bx.xg : bx^2 \\ gx : xb \end{matrix}\right\} = p : q$. Ferner ist sowohl

$$\begin{array}{ll} gx:xa = cx:xb & \text{, als } ax:xb = gx:xc \\ = gx - xc : ax - xb & = ax - xg : bx - xc \\ = cg : ab & = ag : bc \\ \hline \end{array}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} gx : xb \\ p : q \end{matrix}\right\} = ag.gc : ab.bc$$

folglich ist wegen der gegebenen $p : q$, und $ab.bc$, auch $ag.gc$ gegeben (Dat. 2), und da $ag+gc = ac$ gegeben ist, auch ag (Dat. 86), somit der Punkt g, also auch bg, und weil $gx : xb$ gegeben ist, auch x gegeben (Dat. 8).

Construction.

Man nehme $abq = R$, $bq = q$, $pq = p$, $pd \perp aq$, $bae = R = acf$, $ae = ad$, $cf = cb$, beschreibe über fe als Durchmesser einen Kreis, welcher der ac in g zwischen b, c begegne, und ziehe $qx \perp pq$. Der Punkt x wird der gesuchte seyn.

Beweis.

Es ist $da : ab = pq : qb$
$= p : q$
aber $p<q$

also $da < ab$

folglich $bc . da < ab . bc$

Nun ist $ab . bc \overset{=}{<} 1/4\, ac^2$

also auch $\left.\begin{array}{r} bc . da \\ cf . ae \end{array}\right\} < 1/4\, ac^2$

Mithin schneidet der über ef als Durchmesser beschriebene Kreis die bc. Es geschehe in g,h. So ist $ag . gc = ae . cf$

$= ad . bc$

folglich $ag . gc < ab . bc$

Also liegt b dem Halbirungspunkte von ac näher, als g (El. II. 5. Cor.), folglich liegen die Durchschnittspunkte auf verschiedenen Seiten von b. Der zwischen b, c liegende sey g.

Nun ist $ag > ab$

also $ag : ad > \left\{\begin{array}{l} ba : ad \\ bq : qp \\ bx : xg \end{array}\right.$

Da nun $ag . gc = ad . bc$

so ist $ga : ad = bc : cg$

also auch $bc : cg > bx : xg$

und $\left.\begin{array}{r} bc - cg : gc \\ bg : gc \end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l} bx - xg : gx \\ bg : gx \end{array}\right.$

mithin $cg < gx$

Also liegt x in der Verlängerung von bc.

Endlich ist $\left.\begin{array}{r} ad . bc : ab . bc \\ da : ab \\ gx : xb \end{array}\right\} = ag . gc : ab . bc$

Folglich ist das Verhältnifs von $gx:xb$ aus den Verhältnissen $cg:ab$, $ag:bc$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportional-linie zu cg, ab, gx bezeichnet, so ist

$$gx:\alpha = cg:ab \qquad \text{und } \alpha:bx = ag:bc$$

$$= \left\{\begin{matrix} gx-gc \\ cx \end{matrix}\right\}:\alpha-ab \qquad = \alpha-ag:\left\{\begin{matrix} bx-bc \\ cx \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } gx:xb = \alpha-ag:\alpha-ab$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} bx-xg \\ bg \end{matrix}\right\}:bx = \left\{\begin{matrix} ag-ab \\ bg \end{matrix}\right\}:\alpha-ab$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} bx \\ ax-ab \end{matrix}\right\} = \alpha-ab$$

$$\text{und } ax = \alpha$$

$$\text{also } gx:ax = cx:\left\{\begin{matrix} ax-ab \\ bx \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } ax.xc = bx.xg$$

$$\text{und } ax.xc:bx^2 = bx.xg:bx^2$$
$$= gx:xb$$
$$= p:q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die entfernteren Punkte, welche zwischen c und dem für $p=q$ bestimmten Punkte liegen, bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren. Die aber dem für $p=q$ bestimmten Punkte hinaus gelegenen näheren Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Man ziehe auch p mit h zusammen und mache $qy \pm ph$. Es ist $ah.hc = ad.bc.$

$$\text{folglich } ah:ad = bc:ch$$

$$\text{Es ist aber } ch > cb$$

$$\text{also auch } ah < ad$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{r} ab:ad \\ bq:qp \\ by:yh \end{array}\right\} < ba:ah$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} by-yh:hy \\ bh:hy \end{array}\right\} < \left\{\begin{array}{l} ba-ah:ha \\ bh:ha \end{array}\right.$$

$$\text{mithin } hy > ha$$

Also liegt y in der Verlängerung von ca.

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{array}{r} ad.bc:ab.bc \\ da:ab \\ hy:yb \end{array}\right\} = ah.hc:ab.bc$$

Folglich ist das Verhältniſs von $hy:yb$ aus den Verhältnissen $ch:ab$, $ah:bc$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionallinie zu ch, ab, hy bezeichnet, so ist

$$hy:\alpha = ch:ab \qquad \text{und } \alpha:by = ah:bc$$

$$= \left\{\begin{array}{c} ch+hy \\ cy \end{array}\right\} : ab+\alpha \qquad = ah+\alpha : \left\{\begin{array}{c} bc+by \\ cy \end{array}\right.$$

$$\text{also } hy:yb = ah+\alpha : ab+\alpha$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{c} by-yh \\ bh \end{array}\right\} : by = \left\{\begin{array}{c} ab-ah \\ bh \end{array}\right\} : ab+\alpha$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{c} by \\ ba+ay \end{array}\right\} = ab+\alpha$$

$$\text{und } ay = \alpha$$

$$\text{also } hy:ay = cy : \left\{\begin{array}{c} ab+ay \\ by \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } ay.yc = by.yh$$

somit $ay.yc : by^2 = by.yh : by^2$
$= hy : yb$
$= p : q.$

Zus. 3. Es ist also $ax.xc : bx^2 = ay.yc : by^2$

folglich $ax.xc : ay.yc = bx^2 : by^2$
und es läſst sich auf der Verlängerung einer geraden Linie yc, in welcher vier Punkte y, a, b, c gegeben sind, ein fünfter x finden, so daſs
$$ax.xc : ay.yc = bx^2 : by^2.$$

c) Es sey $p > q$. (Fig. 49. 50.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs
$$ax.xc : bx^2 = p : q.$$
Gedenkt man sich $ax.xc = bx.xg$, wobey g zwischen a, b fallen muſs, so ist $\left.\begin{matrix} bx.xg : bx^2 \\ gx : xb \end{matrix}\right\} = p : q$. Und es ist sowohl
$gx : xa = cx : xb$, als auch $ax : xb = gx : xc$
$= gx - xc : ax - xb$ $= ax - xg : bx - xc$
$= gc : ab$ $= ag : bc$

mithin $\left.\begin{matrix} gx : xb \\ p : q \end{matrix}\right\} = ag.gc : ab.bc$

Es ist also, da $p : q$, $ab.bc$ gegeben sind, auch $ag.gc$ (Dat. 2) gegeben. Da nun $ag + gc = ac$ gegeben ist, so ist ag (Dat. 86), somit den Punkt g wie auch gb, und da $gx : xb$ gegeben ist, auch gx (Dat. 8) und der Punkt x gegeben.

Determination.

Da $ax.xc : bx^2 = p : q$ werden soll, und $p > q$ ist, so muſs $ax.xc > bx^2$ werden, folglich auch

$$\left.\begin{array}{r} ax.xc - bx.xc \\ (ax - xb)cx \\ ab.cx \end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l} bx^2 - bx.xc \\ bx(bx - xc) \\ bx.bc \end{array}\right.$$

$$\text{also } ab : bc > bx : xc$$
$$\text{Nun ist } bx > xc$$

also mufs seyn $ab > bc$.

Und vermöge El. II. 5. mufs man haben

$$p : q \leqq \tfrac{1}{4} ac^2 : ab.bc.$$

Construction.

Man nehme $abp = R = abq$, $bq = q$, $qp = p$, $pd \perp aq$, $bae = R = acf$, $ae = ad$, $cf = cb$, beschreibe über ef als Durchmesser einen Kreis, welcher der ac in g begegne, ziehe pg, und $qx \perp pg$. Der Punkt x wird die verlangte Eigenhaft haben.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{array}{r} p : q \\ da : ab \\ da.bc : ab.bc \end{array}\right\} \leqq \tfrac{1}{4} ac^2 : ab.bc \text{ (Determ.)}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} da.bc \\ ae.cf \end{array}\right\} \leqq \tfrac{1}{4} ac^2$$

Also berührt der über ef beschriebene Kreis die ab in ihrem Halbirungspunkte g (Fig. 49), oder schneidet sie zwischen a, b in g (Fig. 50).

Im ersten Fall ist $ab > bc$ (Determ.)

$$\text{also } 2ab > \left\{\begin{array}{l} ab + bc \\ ac \\ 2ag \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } ba > ag$$

$$\text{mithin } ga : ad < \begin{cases} ba : ad \\ bq : qp \\ bx : xg \end{cases}$$

Nun ist $ag \cdot gc = da \cdot bc$ (Lehns. B.)

also $ga : ad = bc : cg$

folglich $bc : cg < bx : xg$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} gc - cb \\ gb \end{matrix}\right\} : bc > \left\{\begin{matrix} gx - xb \\ gb \end{matrix}\right\} : bx$$

mithin $bc < bx$

also liegt x in der Verlängerung von ac.

Im zweiten Fall ist $ab > bc$

$$\text{folglich } 2\,ab > \begin{cases} ab + bc \\ ac \end{cases}$$

mithin $ab > \frac{1}{2}\,ac$

Also liegt der Halbirungspunkt von ac zwischen a, b.

Auch ist $ad > ab$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} ad \cdot bc \\ ag \cdot gc \end{matrix}\right\} > ab \cdot bc$$

folglich liegt g dem Halbirungspunkte von ab näher als b, mithin liegt g zwischen a, b, das heisst, es ist

$ag < ab$

$$\text{also } ga : ad < \begin{cases} ba : ad \\ bx : xg \end{cases}$$

Nun ist $ag \cdot gc = da \cdot bc$

also $ga : ad = bc : cg$

folglich $bc : cg < bx : xg$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} gc-cb \\ gb \end{matrix}\right\} : bc > \left\{\begin{matrix} gx-xb \\ gb \end{matrix}\right\} : bx$$

$$\text{mithin } bc < bx$$

Also liegt x in der Verlängerung von ac.

Ferner ist in beiden Fällen

$$\left.\begin{matrix} ad.bc : ab.bc \\ da : ab \\ gx : xb \end{matrix}\right\} = ag.gc : ab.bc$$

Folglich ist das Verhältniſs von gx : xb aus den Verhältnissen gc : ab, ag : bc zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionallinie zu gc, ab, gx bezeichnet, so ist

$$gx : \alpha = gc : ab \qquad \text{und } \alpha : bx = ag : bc$$
$$= \left\{\begin{matrix} gx-gc \\ cx \end{matrix}\right\} : \alpha - ab \qquad = \alpha - ag : \left\{\begin{matrix} bx-bc \\ cx \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } gx : xb = \alpha - ag : \alpha - ab$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} gx-xb \\ bg \end{matrix}\right\} : bx = \left\{\begin{matrix} ab-ag \\ bg \end{matrix}\right\} : \alpha - ab$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} bx \\ ax-ab \end{matrix}\right\} = \alpha - ab$$

$$\text{also } ax = \alpha$$

$$\text{somit } gx : ax = cx : \left\{\begin{matrix} ax-ab \\ bx \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } ax.xc = bx.xg$$

$$\text{und } ax.xc : bx^2 = bx.xg : bx^2$$
$$= gx : xb$$
$$= p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Der in Fig. 49. angegebene Punkt x bestimmt ein grösseres Verhältniſs, als jeder andere in der Verlängernng von ac. Von zwey auf einerley Seite desselben liegenden bestimmt der nähere ein grösseres Verhältnifs, als der entferntere.

Zus. 2. Zieht man den Punkt p mit dem zweiten Durchschnitt des Kreises mit ab zusammen und macht $qy = ph$, so liegt auch y in der Verlängerung von ac, und es ist $ay \cdot yc : by^2 = p : q$, welches eben so bewiesen werden kann, wie es für x geschehen ist.

Zus. 3. Es ist also $ax \cdot xc : bx^2 = ay \cdot yc : by^2$

folglich $ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx^2 : by^2$.

Und man kann auf der Verlängerung einer geraden Linie ac, in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, einen fünften x finden, so dafs

$$ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx^2 : by^2.$$

Simsons andere Auflösung. (Fig. 51. 52. 53.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc : bx^2 = p : q.$$

Beschreibt man über ac einen Halbkreis, und legt an denselben die Tangente xg, so ist $gx^2 = ax \cdot xc$, folglich $gx^2 : xb^2 = p : q$, mithin das Verhältnifs von $gx^2 : xb^2$, also (Dat. 58) auch das von $gx : xb$ gegeben. Zieht man von des Kreises Mittelpunkte m an den Berührungspunkt der Tangente die gerade Linie mg, und verlängert die Tangente bis zum Durchschnitt mit der in b auf ab perpendicularen geraden Linie bf in f, so ist $\Delta\ mgx \backsim \Delta\ bfx$, folglich verhält sich $gx : xb = mg : bf$, mithin ist auch das Verhältnifs von $mg : bf$ gegeben. Es ist aber auch $mg = \frac{1}{2} ac$ gegeben, also auch bf, somit der Punkt f, und die von f an den Kreis gezogene

Tangente fg und der Durchschnitt x derselben mit der verlängerten ac.

Determination.

Bezeichnet man mit k den Durchschnitt des Perpendikels bf mit dem Kreise, so muſs, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, werden

$$bf \overset{=}{>} bk$$

$$\text{also } mg : bf \overset{=}{<} mg : bk$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} mg^2 : bf^2 \\ p : q \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} mg^2 : bk^2 \\ \frac{1}{4} ac^2 : ab \, . \, bc \end{matrix}\right.$$

Ueberdies wird $ax \, . \, xc \overset{=}{>} bx^2$, wenn $p \overset{=}{>} q$.

$$\text{Es ist aber } mx^2 > ax \, . \, xc \text{ (El. II. 36 und I. 19.)}$$

$$\text{folglich } mx^2 > bx^2$$

$$\text{also } mx > xb$$

Es liegt also der Halbirungspunkt von ac zwischen a, b, und es muſs ab > bc seyn.

Construction.

Man beschreibe über ac einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt m, mache bd = mc, dp = p, pq = q, beschreibe über dq einen Halbkreis, welcher dem in p auf ab errichteten Perpendikel begegne in e, ziehe de, welche verlängert wird bis zum Durchschnitt f mit dem in b auf ab errichteten Perpendikel, und lege von f eine Tangente fg an den über ac beschriebenen Kreis, deren Durchschnitt mit der verlängerten ac den gesuchten Punkt x bestimmen wird.

Beweis.

$$\text{Es ist}\; \left.\begin{array}{r} p:q \\ dp:pq \\ dp^2:pe^2 \\ db^2:bf^2 \\ \tfrac{1}{4}ac^2:bf^2 \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{4}ac^2 : ab \,.\, bc \text{ (Determ.)} \\ \tfrac{1}{4}ac^2 : bk^2 \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } bf^2 \geqq bk^2$$

$$\text{und } bf \geqq bk$$

Ist nun $p < q$, oder ist $ab > bc$, wenn $p \geqq q$, so giebt es allemal eine Tangente fg, welche die verlängerte ac in x trifft.

$$\text{Und es ist } gx : xb = db : bf$$
$$= dp : pe$$

$$\left.\begin{array}{r} gx^2 \\ ax \,.\, xc \end{array}\right\} : xb^2 = dp^2 : pe^2$$
$$= p : q.$$

Zus. 1. In dem Falle von $p = q$ giebt es, weil $bf = \tfrac{1}{2}ac$ nicht eine zweite Tangente (Fig. 53). In dem Falle von $p > q$ giebt es, wegen $bf < \tfrac{1}{2}ac$ eine zweite Tangente, welche gleichfalls die verlängerte ac schneidet. (Fig. 52). In dem Falle von $p < q$ giebt es wegen $bf > \tfrac{1}{2}ac$ eine zweite Tangente, welche der verlängerten ca in y begegnet (Fig. 51).

Zus. 2. (Sims.) In den Fällen von $p = q$, $p < q$, (Fig. 51. 53) bestimmen die von c entfernteren Punkte der verlängerten ac grössere Verhältnisse als die näheren. Der in dem Falle von $p > q$ sich ergebende Punkt der verlängerten ac, wenn $bf = bk$ wird, bestimmt ein grösseres Verhältniſs, als jeder andere der verlängerten ac, und die ihm auf einerley Seite näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Der Bücher

de sectione determinata

Zweites.

Des APOLLONIUS von PERGA

ZWEITES BUCH

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig. 54—61.)

Auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, d gegeben sind, einen fünften x zwischen den beiden mittleren zu finden, so daſs das Verhältniſs des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den Segmenten zwischen x und den beiden anderen Punkten einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 54. 55.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daſs

$$ax . xb : cx . xd = p : q.$$

a) Es sey $p = q$. (Fig. 54.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs $ax . xb = cx . xd$, so ist $ax : xc = dx : xb$

$$= ax + xd : cx + xb$$
$$= ad : bc$$

Es ist aber das Verhältniſs von $ad : bc$ (Dat. 1.), also auch das von $ax : xc$, und da auch $ax+xc=ac$ gegeben ist, ax (Dat. 8), somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man mache $cae=R=acf$, $ae=ad$, $cf=cb$, und ziehe ef. Der Durchschnittspunkt dieser Linie mit ac wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ax : xc &= ae : cf \\ &= ad : bc \end{aligned}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} ax+xc \\ ac \end{matrix}\right\} : cx = ad+bc : cb$$

$$\text{Es ist aber } ac < ad+bc$$

$$\text{folglich auch } cx < cb.$$

Also liegt der Punkt x zwischen b, c. Ferner ist

$$\begin{aligned} ax : xc &= ad-ax : bc-cx \\ &= dx : xb \end{aligned}$$

$$\text{mithin } ax.xb = cx.xd.$$

b) Es sey $p>q$. (Fig. 55.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs $ax.xb:cx.xd=p:q$, so ist auch $ax.xb-cx.xd : cx.xd = p-q : q$. Man gedenke sich (nach Fall 1. a.) den Punkt e so gefunden, daſs $ae.eb=ce.ed$, wobey wegen $p>q$ der Punkt e so liegen wird, daſs $bx>be$. Alsdann ist $ax.xb=(ae+ex)(be+ex)$; $cx.xd=(ce-ex)(de-ex)$

$$=ae.eb+(ae+eb+ex)ex, \quad =ce.ed-(ce+ed-ex)ex$$

folglich $ax.xb - cx.xd = (ae+eb+ce+ed).ex$
$= (ac+bd)\ ex$

---

mithin auch $(ac+bd)\ ex : cx.xd = p-q : q$.
Es sind aber c, d (p. hyp.), e (Fall 1. a.), $p-q : q$ (hyp.) gegeben, also ist die Aufgabe auf ... uch 1. Aufgabe III, Fall 1. zurück geführt.

Construction.

Man nehme $cag = R = acf = chp$, $ag = ad$, $cf = cb$, ziehe gf, welche ao in e schneide, mache ferner $ah = db$, $ahp = R$, $cq = q$, $hp = p$, ziehe pq, welche wegen $p > q$ der verlängerten ac begegnet, es geschehe in k, nehme $ckl = R$, $kl = kc$, $md = de$ und beschreibe über ml als Durchmesser einen Kreis, welcher bc in dem gesuchten Punkte schneiden wird.

Beweis.

Es ist $hk : kc = hp : cq$
$= p : q$

---

folglich $\left.\begin{matrix} hk-kc \\ hc \\ ac+bd \end{matrix}\right\} : ck = p-q : q$

Also schneidet vermöge Buch I. Aufg. III. Fall 1. der über ml beschriebene Kreis die ce in x so, dass $(ac+bd)\ ex : cx.xd = p-q : q$.

Es ist aber

$$\begin{aligned}(ac+bd)\ ex &= (ae+ec+be+ed)\ ex \\ &= (ae+eb+ex)ex + (ce+de-ex)\ ex \\ &= ae.eb + (ae+eb+ex)\ ex - ce.ed \\ &\quad + (ce+ed-ex)\ ex \ (\text{Fall 1. a.}) \\ &= (ae+ex)(be+ex) - (ce-ex)(de-ex) \\ &= ax.xb - cx.xd\end{aligned}$$

Also ist auch $ax.xb - cx.xd : cx.xd = p - q : q$

folglich $ax.xb : cx.xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch I. Aufg. III. Fall 1. Zus. 2. schneidet der Kreis die verlängerte ad in y so, dafs $(ac+bd)\,ey : cy.yd = p - q : q$. Es ist aber

$$\begin{aligned}(ac+bd)\,ey &= (ae+eb+ce+ed)\,ey\\ &= (ae+eb+ey)\,ey + (ce+ed-ey)\,ey\\ &= ae.eb + (ae+eb+ey)\,ey - ce.ed\\ &\quad + (ce+ed-ey)\,ey\\ &= (ae+ey)(be+ey) - (ey-ec)(ey-ed)\\ &= ay.yb - cy.yd\end{aligned}$$

folglich ist auch $ay.yb - cy.yd : cy.yd = p - q : q$

also $ay.yb : cy.yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xb : cx.xd = ay.yb : cy.yd$

folglich auch $ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd$.

Und man kann, wenn in einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, d, y gegeben sind, einen sechsten zwischen b, c finden, so dafs

$$ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd.$$

c) Es sey $p < q$. (Fig. 55.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs $ax.xb : cx.xd = p : q$, so ist auch $cx.xd : ax.xb = q : p$ mithin dieser Fall auf Fall 1. b. reducirt.

Fall 2. (Fig. 56. 57.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, dafs

$$ax.xc : bx.xd = p : q.$$

a) Es sey p=q. (Fig. 56.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs ax.xc=bx.xd, so ist auch bx : xc=ax : xd

=ax−xb : dx−xc.

=ab : cd.

Da aber ab : cd, also auch bx : xc und bx+xc=bc gegeben ist, so ist auch bx (Dat. 8), somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man nehme abe=R=acf, be=ba, cf=cd, und ziehe ef. Diese Linie wird bc in dem gesuchten Punkte schneiden.

Beweis.

Es ist bx:xc=be:cf (El. VI. 4.)

=ab:cd

=ab+bx:dc+cx

=ax:dx

folglich ax.xc=bx.xd.

b) Es sey p>q (Fig. 57).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

ax.xc:bx.xd=p:q

folglich auch ax.xc−bx.xd : bx.xd=p−q : q. Man suche (nach Fall 2, a.) den Punkt e so, dafs ae.ec=be.ed, wobey vermöge Lehnsatz C der Punkt e zwischen c,x fällt. Alsdann ist sowohl

ax.xc=(ae−ex)(ce+ex) ,als bx.xd=(be−ex)(de+ex

=ae.ec+(ae−ce−ex)ex =be.ed−(ed−be

+ex)ex

folglich $ax.xc - bx.xd = (ae - ce + ed - eb)ex$
$$= (ad - bc)ex$$

mithin auch $(ad - bc)ex : bx.xd = p - q : q$.
Da nun $b, d, e, ad - bc, p - q : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch I. Aufg. III. Fall 2. reducirt.

Construction.

Man nehme $abh = R = abq$, $bh = ba$, $cm = cd$, ziehe hm, welche der bc in e begegne, mache $ag = cd$, $agp = R$, $bq = q$, $gp = p$, ziehe pq, welche wegen $p > q$ der verlängerten gb begegnet, es geschehe in f, nehme $bfl = R = bdk$, $fl = fb$, $dk = de$ und beschreibe über kl als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit bc ist der gesuchte Punkt.

Beweis.

$$\text{Es ist } gf : fb = gp : bq$$
$$= p : q$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} gf - fb \\ gb \\ ad - bc \end{array}\right\} : bf = p - q : q.$$

Also schneidet der über kl beschriebene Kreis die Linie be vermöge Buch I. Aufg. III. Fall 2. so, daß
$$(ad - bc)ex : bx.xd = p - q : q$$

folglich ist $(ad - bc)ex + bx.xd : bx.xd = p : q$

Es ist aber

$$\begin{aligned}(ad - bc)ex &= (ae + ed - ec - eb)ex \\ &= (ae - ec - ex)ex + (de - eb + ex)ex \\ &= ae.ec + (ae - ec - ex)ex - be.ed \\ &\quad + (de - eb + ex)ex \text{ (Fall 2. a)} \\ &= (ae - ex)(ce + ex) - (be - ex)(de + ex) \\ &= ax.xc - bx.xd\end{aligned}$$

folglich ist auch $ax.xc : bx.xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch I. Aufgabe III. Fall 2. Zus. 2. schneidet der Kreis die verlängerte ad in y so, dafs $(ad - bc)\,ey : by \cdot yd = p - q : q$.

folglich auch $(ad - bc)\,ey + by \cdot yd : by \cdot yd = p : q$.

Es ist aber

$$(ad-bc)\,ey = (ae+ed-ce-eb)\,ey$$
$$= (ae-ec+ey)\,ey + (de-eb-ey)\,ey$$
$$= (ae-ec+ey)\,ey + ae.ec + (de-eb-ey)\,ey + be.ed$$
$$= (ae+ey)(ey-ec) - (be+ey)(ey-ed)$$
$$= ay \cdot yc - by \cdot yd$$

folglich ist auch $ay \cdot yc : by \cdot yd = p : q$

Zus. 3. Es ist also $ax \cdot xc : bx \cdot xd = ay \cdot yc : by \cdot yd$

mithin $ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx \cdot xd : by \cdot yd$

Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, d, y gegeben sind, ein sechster x zwischen b, c finden, so dafs

$$ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx \cdot xd : by \cdot yd.$$

c) Es sey $p < q$. (Fig. 57.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q,$$

so ist auch $bx \cdot xd : ax \cdot xc = q : p$, folglich die Aufgabe auf Fall 2. b. reducirt.

Fall 3. (Fig. 58—61.)

Den Punkt x soll so gefunden werden, dafs

$$ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

a) Es sey $ab = cd$. (Fig. 58. 59.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xd : bx.xc = p : q$$

$$\text{so ist auch } \left.\begin{array}{r} ax.xd \\ (ab+bx)xd \\ ab.dx+bx.xd \\ ab.dx+bx.xc+bx.cd \\ ab.bd+bx.xc \end{array}\right\} - bx.xc \left.\vphantom{\begin{array}{r} a\\a\\a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} : bx.xc = p-q : q$$
$$ab.bd$$

Da ab.bd, p−q : q gegeben sind, so ist (Dat. 2) bx.xc gegeben, und da bx+xc = bc gegeben ist, ist bx (Dat. 86), somit der Punkt x gegeben.

Determination.

Vermöge El. II. 5. muſs seyn

$$p-q : \geqq ab.bd : \tfrac{1}{4}bc^2$$

$$\text{folglich auch } p:q \geqq ab.bd+\tfrac{1}{4}bc^2 : \tfrac{1}{4}bc^2$$
$$\geqq 4ab.bd+bc^2 : bc^2$$
$$\geqq 4ab(bc+cd)+bc^2 : bc^2$$
$$\geqq 4ab.bc+\left\{\begin{array}{l}4ab.cd\\4ab^2\end{array}\right\}+bc^2 : bc^2$$
$$\geqq (2ab+bc)^2 : bc^2$$
$$\geqq ad^2 : bc^2.$$

Construction.

Man nehme abg = R = abh = bcf, bg = bd, bp = p, pq = q, qe $\parallel$ pc, welche der bc in e begegne, ziehe ge, welche die cf in f schneide, mache bh = ba und beschreibe über hf als Durchmesser einen Kreis, welcher der bc in dem gesuchten Punkte x begegnen wird.

Beweis.

Es ist $p : q \overset{=}{>} ad^2 : bc^2$ (Determ.)

$$\overset{=}{>} (2ab + bc)^2 : bc^2$$

$$\overset{=}{>} 4ab^2 + 4ab \, . \, bc + bc^2 : bc^2$$

$$\overset{=}{>} 4ab\,(dc + cb) + bc^2 : bc^2$$

$$\overset{=}{>} 4ab \, . \, bd + bc^2 : bc^2$$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{array}{r} p - q : q \\ bq : qp \\ be : ec \\ bg : cf \\ bd : cf \\ ab \, . \, bd : ab : cf \end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{l} 4ab \, . \, bd : bc^2 \\ ab \, . \, bd : \tfrac{1}{4} bc^2 \end{array}\right.$$

$$\text{mithin}\quad \left.\begin{array}{r} ab \, . \, cf \\ bh \, . \, cf \end{array}\right\} \overset{=}{<} \tfrac{1}{4} bc^2$$

Also berührt, oder schneidet der über gf beschriebene Kreis die bc. Es geschehe in x. In beiden Fällen ist $bx \, . \, xc = bh \, . \, cf$

$$= ab \, . \, cf$$

also $ab \, . \, bd : bx \, . \, xc = ab \, . \, bd : ab \, . \, cf$

$$= p - q : q$$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{array}{r} ab \, . \, bd + bx \, . \, xc : bx \, . \, xc \\ ab \, . \, (dx + xb) + bx \, . \, xc : bx \, . \, xc \\ ab \, . \, dx + bx \, . \, xd : bx \, . \, xc \\ ax \, . \, xd : bx \, . \, xc \end{array}\right\} = p : q$$

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt z von bc in Fig. 58. bestimmt ein kleineres Verhältnifs, als jeder andere Punkt der geraden Linie bc. Von zwey auf einerley Seite des Halbirungspunktes von bc liegenden Punkten bestimmt der ihm näher liegende ein kleineres Verhältnifs, als der entferntere.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit der Linie bc beweiset man eben so, wie für den Punkt x, dafs $ay.yd : by.yc = p:q$.

Zus. 3. Es ist mithin

$$ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$$

mithin auch $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$. Es läfst sich also auf einer geraden Linie ad, in welcher fünf Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, wenn $ab=cd$ ist, zwischen b, c ein sechster x finden, so dafs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

b) Es sey nicht $ab=cd$, z. E. $ab>cd$. (Fig. 60. 61.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xd : bx.xc = p:q,$$

so ist auch $ax.xd - bx.xc : bx.xc = p-q : q$.

Es ist aber

$$\begin{aligned} ax.xd &= (ab+bx)xd \\ &= ab.dx+bx.xd \\ &= ab.dx+bx.cd+bx.xc \\ &= ab.dx+bd.dc-xd.dc+bx.xc \\ &= (ab-cd)dx+bd.dc+bx.xc \end{aligned}$$

folglich auch $ax.xd-bx.xc=(ab-cd)dx+bd.dc$

Verwandelt man $bd.dc$ in ein Rechteck, dessen eine Seite $=ab-cd$ und dessen andere Seite de in

die Verlängerung von ad getragen wird, so ist
$ax.xd-bx.xc=(ab-cd)dx+(ab-cd)de$
$=(ab-cd)ex$
folglich ist auch $(ab-cd)ex:bx.xc=p-q:q.$

Da nun b,c,e, $ab-cd$, $p-q:q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe III. Fall 3. reducirt.

Determination.

Vermöge Buch 1. Aufg. III. Fall 3. Determ. muſs seyn $p-q:q \overset{=}{>} ab-cd:be+ec-2\sqrt{be.ec}$. Also muſs auch seyn $p-q:q \overset{=}{>} (ab-cd)(be+ec+2\sqrt{be.ec})$
$:(be+ec-2\sqrt{be.ec})(be+ec+2\sqrt{be.ec}$

$$\overset{=}{>}(ab-cd)be+(ab-cd)ec$$

$$+2\sqrt{(ab-cd)be(ab-cd)ec}:\left\{\begin{array}{l}(be+ec)^2-4be.ec\,(\text{El.II.5.C.})\\(be-ec)^2\\bc^2.\end{array}\right.$$

Es soll aber werden $(ab-cd)\,de=bd.dc$

folglich wird $ab-cd:dc=bd:de$

mithin sowohl
$ab-cd:ab=bd:bd+de$, als auch $ab-cd:dc=ac:ce$
$=bd:be$

also $(ab-cd)\,be=ab.bd$, und $(ab-cd)\,ec=ac.cd$

folglich mufs seyn $p-q:q \geqq ab.bd+ac.cd$

$$+2\sqrt{ab.bd.ac.cd}:bc^2$$

$$\geqq ac.bd-cb.bd+ab.cd+bc.cd$$

$$+2\sqrt{ab.bd.ac.cd}:bc^2$$

$$\geqq ac.bd+ab.cd-\left\{\begin{matrix} cb\,(bd-dc) \\ cb^2 \end{matrix}\right\}$$

$$+2\sqrt{ab.bd.ac.cd}:bc^2$$

---

mithin auch $p:q \geqq ac.bd+ab.cd$

$$+2\sqrt{ab.bd.ac.cd}:bc^2$$

$$\geqq (\sqrt{ac.bd}+\sqrt{ab.cd})^2:bc^2$$

Anmerkung.

Es ist $(\sqrt{ac.bd}+\sqrt{ab.cd})\,(\sqrt{ac.bd}-\sqrt{ab.cd})$

$$= ac.bd-\left\{\begin{matrix} ab.cd \\ (ad-db)\,cd \end{matrix}\right.$$

$$= ad.db-ad.dc$$

$$= ad.bc$$

---

folglich $\sqrt{ac.bd}+\sqrt{ab.cd}:bc=ad:\sqrt{ac.bd}-\sqrt{ab.cd}$

also auch $p:q \geqq ad^2:(\sqrt{ac:bd}-\sqrt{ab.cd})^2$; und dieses ist die Simsonsche Determination.

Construction.

Man mache $adg=R=dbn$, $bn=ba$, ziehe ng, welche der verlängerten bd begegne in e, nehme $ah=cd$, $ahp=R=abq$, $hp=p$, $bq=q$, ziehe pq, welche der verlängerten ab begegne in k, mache $bkl=R=bcm$, $kl=kb$, $cm=ce$, und beschreibe über lm als Durchmesser einen Kreis, welcher der bc in dem gesuchten Punkte x begegnen wird.

Beweis.

Es ist $p:q \geqq (\sqrt{ac.bd} + \sqrt{ab.cd})^2 : bc^2$

$$\geqq ac.bd + ab.cd + 2\sqrt{ac.bd.ab.cd} : bc^2$$

folglich $p-q:q \geqq ac.bd + ab.cd - \left\{\begin{matrix} bc^2 \\ bc\,(bd-dc) \end{matrix}\right\} + 2\sqrt{ac.bd.ab.cd} : bc^2$

$$\geqq ac.bd - cb.bd + ab.cd + bc.cd + 2\sqrt{ac.bd.ab.cd} : bc^2$$

$$\geqq ab.bd + ac.cd + 2\sqrt{ab.bd.ac.cd} : bc^2$$

Es ist aber

$$\left.\begin{matrix} bn:dg \\ ab:cd \end{matrix}\right\} = be:ed$$

also $ab-cd:cd = bd:de$

folglich

$$ab-cd:ab = bd:\left\{\begin{matrix} bd+de \\ be \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad ab-cd:dc = ac:ce$$

also $(ab-cd)\,be = ab.bd$ und $(ab-cd)\,ce = ac.cd$

mithin $p-q:q \geqq (ab-cd)\,be + (ab-cd)\,ce + 2\sqrt{(ab-cd)\,be\,(ab-cd)\,ce} : bc^2$

$$\geqq (ab-cd)\,(be+ec+2\sqrt{be.ec}) : \left\{\begin{matrix} bc^2 \\ (be-ec)^2 \\ (be+ec)^2 - 4\,be.ec \\ (be+ec-2\sqrt{be.ec})\,(be+ec+2\sqrt{be.ec}) \end{matrix}\right.$$

$$\geqq ab-cd : be+ec-2\sqrt{be.ec}.$$

Nun ist $\left.\begin{matrix} hp : bq \\ p : q \end{matrix}\right\} = hk : kb$

folglich $p - q : q = hb : bk$.

Also berührt, oder schneidet der über lm beschriebene Kreis die bc in einem Punkte x, so daſs in beiden Fällen $(ab - cd)\, ex : bx \,.\, xc = p - q : q$ (Buch 1, Aufg. III. Fall 3).

Es ist aber $(ab - cd)\, ex = (ab - cd)\, dx + \left\{\begin{matrix} (ab - cd)\, ed \\ bd \,.\, dc \end{matrix}\right.$

also auch $(ab - cd)\, dx + bd \,.\, dc : bx \,.\, xc = p - q : q$. Ferner

$$\begin{aligned}(ab - cd) dx + bd.dc + bx.xc &= ab \,.\, dx - cd \,.\, dx + bd.dc + bx.xc \\ &= ab \,.\, dx + bx \,.\, cd + bx \,.\, xc \\ &= ab \,.\, dx + bx \,.\, xd \\ &= ax \,.\, xd.\end{aligned}$$

also $(ab - cd)\, dx + bd \,.\, dc = ax \,.\, xd - bx \,.\, xc$

mithin $ax \,.\, xd - bx \,.\, xc : bx \,.\, xc = p - q : q$

folglich $ax \,.\, xd : bx \,.\, xc = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt von kc bestimmt ein kleineres Verhältniſs, als jeder andere Punkt dieser Linie. Von zwey auf einerley Seite desselben liegenden Punkten bestimmt der nähere ein kleineres Verhältniſs, als der entferntere.

Zus. 2. (Sims.) Für den Punkt x des kleinsten Verhältnisses verhält sich $bx^2 : xc^2 = ab \,.\, bd : ac \,.\, cd$. (Fig. 60).

Zus. 3. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit kc läſst sich eben so, wie für x, beweisen, daſs $ay \,.\, yd : by \,.\, yc = p : q$.

Zus. 4. Es verhält sich also

$$\frac{ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc}{}$$

folglich auch $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.
Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, und $ab \gtrless cd$ ist, zwischen b, c ein sechster x finden, so dafs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

Aufgabe II. (Fig. 62—67.)

Auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, d gegeben sind, zwischen einem der äusseren und dem nächstliegenden mittleren einen fünften x zu finden, so dafs das Verhältnifs des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den Segmenten zwischen x und den beiden übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 62. 63. 64.)

Es soll zwischen c, d ein Punkt x gefunden werden, so dafs $ax.xd : bx.xc = p:q$.

a) Es sey $ab = cd$. (Fig. 62.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xd : bx.xc = p : q,$$

so ist auch

$$\left.\begin{array}{r} ax.xd + bx.xc : bx.xc \\ (ac + cx)xd + bx.xc : bx.xc \\ ac.xd + (bx + xd)xc : bx.xc \\ ac.xd + \left\{\begin{matrix} bd.xc \\ ac.xc \end{matrix}\right\} : bx.xc \\ ac.cd : bx.xc \end{array}\right\} = p+q : q$$

Nun sind $ac.cd$, $p+q:q$ gegeben, also ist (Dat. 2) $bx.xc$, und da auch $bx-xc$ gegeben ist, bx (Dat. 85), somit x gegeben.

Construction.

Man mache $baf=R=bar=abe$, $af=ac$, $ap=p$, $pq=q=qr$, $qh \pm br$, ziehe fh, welche der be in e begegne, mache $bcg=R$, $cg=cd$ und beschreibe über eg als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ac in dem gesuchten Punkte x schneiden wird.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } bx.xc &= be.cg \text{ (Lehns. A.)} \\ &= be.cd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ac.cd:bx.xc &= ac.cd:be.cd \\ &= ac:be \\ &= af:be \\ &= ah:hb \\ &= aq:qr \\ &= p+q:q. \end{aligned}$$

Es ist aber $p+q>q$

mithin ist auch $\left.\begin{matrix} ac.cd \\ bd.dc \end{matrix}\right\} > bx.xc$

also $bd>bx$, das heifst, der Punkt x liegt zwischen c, d. Ferner ist

$$ac.cd-bx.xc:bx.xc=p:q$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } ac.cd &= ac.(cx+xd) \\ &= ac.cx+ac.xd \\ &= bd.xc+ac.xd \\ &= (bx+xd)xc+ac.xd \\ &= bx.xc+ax.xd \end{aligned}$$

folglich $\underline{ac.cd - bx.xc = ax.xd}$

also auch $ax.xd : bx.xc = p:q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der cd bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit ab beweiset man eben so, wie für den ersten, dafs $ay.yd : by.yc = p:q$.

Zus. 3. Mithin ist $\underline{ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc}$

folglich auch $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, y, b, c, d gegeben sind, und $ab = cd$ ist, zwischen c, d ein sechster angeben, so dafs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

b) Es sey $ab > cd$. (Fig. 63).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$\underline{ax.xb : bx.xc = p:q}$$

so ist auch $ax.xd + bx.xc : bx.xc = p+q : q$.

$$\begin{aligned}
\text{Es ist aber} \quad ax.xd &= (ab+bx)\,xd \\
&= ab.xd + bx.xd \\
&= ab.xd + bx\,(dc - cx) \\
&= ab.xd + bx.dc - bx.xc \\
&= ab.xd + bd.dc - xd.dc - bx.xc \\
&= \underline{(ab - dc)\,dx + bd.dc - bx.xc}
\end{aligned}$$

folglich ist

$$ax.xd + bx.xc = (ab - dc)\,dx + bd.dc.$$

Verwandelt man $bd.dc$ in ein Rechteck, dessen eine Seite $= ab - dc$, und dessen andere Seite de in die Verlängerung von ad gelegt wird, so ist

$$ax.xd+bx.xc=(ab-dc)(dx+de)$$
$$=(ab-dc)ex$$

folglich auch $(ab-dc)ex:bx.xc=p+q:q$.

Da nun $ab-dc, e, b, c, p+q:q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe III. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man mache $bdf=R=dbl$, $df=dc$, $bg=ab$, ziehe fg, welche der verlängerten bd in e begegne, nehme $dh=ab$, $dhp=R=hcq$, $hp=p$, $cq=q$, ziehe pq, welche die hc in m schneide, mache $cmk=R$, $mk=mc$, $lb=be$, und beschreibe über kl als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt desselben mit cd ist der verlangte Punkt.

Beweis.

Es ist $bx.xm=bl.mk$ (Lehns. A.)
$=be.mc$

Es ist aber $be.mc>bc.cm$

also ist $bx.xm>bc.cm$

mithin $mx>mc$

und $be>bx$.

Ferner ist $hm:mc=ph:cq$
$=p:q$

also $\left.\begin{matrix}hm+mc\\ab-cd\end{matrix}\right\}:cm=p+q:q$. Mithin schneidet der über kl beschriebene Kreis die verlängerte bm so, dafs $(ab-cd)ex:bx.xc=p+q:q$. (Buch 1. Aufgabe III. Fall 1).

Da aber $p+q>q$,

so ist auch $(ab-cd)ex>bx.xc$, mithin wird auch seyn $cx<cd$. Wo nicht, so wäre

$$dx \geqq cd$$

folglich auch $ed \geqq ex$, weil $be>bx$,

also $(ab-cd)ex \leqq (ab-cd)ed$

also auch $bx.xc<(ab-cd)ed$.

Es ist aber $\left.\begin{array}{l} bg:df \\ ab:dc \end{array}\right\} = be:ed$

also $ab-cd:dc=bd:de$

folglich $(ab-cd)de=bd.dc$. Also wäre auch $bx.xc<bd.dc$, welches unmöglich ist. Es ist also $cx<cd$, und x liegt zwischen c,d. Endlich ist auch $(ab-cd)ex-bx.xc:bx.xc=p:q$

$$\begin{aligned} \text{aber } (ab-cd)ex &= (ab-cd)dx+(ab-cd)de \\ &= ab.dx-cd.dx+bd.dc \\ &= ab.dx+bx.dc \\ &= ab.dx+bx.xc+bx.xd \\ &= ax.xd+bx.xc \end{aligned}$$

folglich $(ab-cd)ex-bx.xc=ax.xd$

also $ax.xd:bx.xc=p:q$.

Zus. 1. (Sims.) Von zwey zwischen c,d gelegenen Punkten bestimmt der näher bei c liegende ein grösseres Verhältnifs, als der entferntere.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten cb ist vermöge Buch 1. Aufgabe III.

Fall I. Zus. 2. $(ab-dc)ey : by.yc = p+q : q$

also $(ab-dc)ey - by.yc : by.yc = p : q$

Es ist aber $(ab-cd)ey = \left\{\begin{matrix}(ab-cd)ed \\ bd.dc\end{matrix}\right\} + (ab-cd)dy$

$$= ab.dy - \left\{\begin{matrix}(yd-db)dc \\ by.dc \\ by.(dy-yc)\end{matrix}\right.$$

folgl. $(ab-cd)ey - by.yc = ab.dy - by.yd$
$= (ab-by)yd.$

Es ist aber $(ab-cd)ey > by.yc$

folglich auch $ab > by$, also liegt y zwischen a,b.

Ferner ist $(ab-cd)ey - by.yc = (ab-by)yd$
$= ay.yd$

also $ay.yd : by.yc = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$,

folglich $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a,y,b,c,d, gegeben sind, ein sechster x zwischen c,d, wenn $cd < ab$, finden, so dafs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

c) Es sey $ab < cd$. (Fig. 64).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs
$ax.xd : bx.xc = p : q$, so ist auch

$ax.xd + bx.xc : bx.xc = p+q : q.$

Es ist aber $ax.xd = ax(dc-cx)$

$$= ax.cd - ax.xc$$

$$= ax.cd - (ab+bx)xc$$

$$= ax.cd - (bx.xc \left\{ \begin{array}{l} -ab.xc \\ -ab(ax-ac) \\ -ba.ax+ba.ac \end{array} \right.$$

$$= (cd-ab)ax - bx.xc + ba.ac$$

folglich $ax.xd + bx.xc = (cd-ab)ax + ba.ac$.

Verwandelt man $ba.ac$ in ein Rechteck, dessen eine Seite $= cd-ab$, und dessen andere Seite ae in die Verlängerung von cb gelegt wird, so ist

$$ax.xd + bx.xc = (cd-ab)(ax+ae)$$

$$= (cd-ab)ex$$

folglich auch $(cd-ab)ex : bx.xc = p+q : q$.

Nun sind, $(cd-ab)$, e,b, c, $p+q : q$ gegeben, folglich ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man nehme $baf = R = bcg$, $fa = ab$, $cg = cd$, ziehe gf, welche der verlängerten ba begegne in e, mache $ah = cd$, $bhp = R = abq$, $hp = p$, $bq = q$, ziehe pq, welche der bh begegne in k, nehme $bkl = R = bcm$, $lk = kb$, $mc = ce$, und beschreibe über lm als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt desselben mit der verlängerten ac wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{array}{l} cg : af \\ cd : ab \end{array}\right\} = ce : ea$$

folglich $cd-ab : ba = ca : ae$

also $(cd-ab)ae = ba.ac$.

Ferner ist $hk : kb = hp : bq$
$= p : q$

also $\left.\begin{matrix} hb \\ cd - ab \end{matrix}\right\} : bk = p + q : q$

Mithin schneidet der über ml beschriebene Kreis die verlängerte bc so, daſs
$(cd - ab)\, ex : bx . xc = p + q : q$ (Buch 1, Aufg. IV, Fall 1.)

folglich $(cd - ab)\, ex - bx . xc : bx . xc = p : q$.

Es ist aber $(cd - ab)\, ex = (cd - ab)\, ea + (cd - ab)\, ax$
$= ba . ac + (cd - ab)\, ax$
$= cd . ax - (ax - ac)\, ab$
$= cd . ax - cx . ab$
$= cd . ax - cx\, (ax - xb)$
$= cd . ax - ax . xc + bx . xc$

also $(cd - ab)\, ex - bx . xc = cd . ax - ax . xc$
$= ax . xd$

mithin $ax . xd : bx . xc = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der Linie cd bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten ck ist $cy . yk = kl . cm$
$= kb . ce$

Es ist aber $kb . ce > kb . bc$

also ist $cy . yk > kb . bc$

folglich $cy > cb$.

Ferner ist vermöge Buch 1. Aufgabe IV. Fall 1.

Zus. 2. $(cd-ab)ey : by.yc = p+q : q$

folglich ist $(cd-ab)ey > by.yc$, also wird auch seyn $cy < ca$. Wo nicht, so wäre $cy \underset{>}{=} ca$

also auch $ey \underset{<}{=} ea$

mithin $(cd-ab)ey \underset{<}{=} \begin{cases}(cd-ab)ea \\ ba.ac\end{cases}$

also auch $by.yc < ba.ac$, welches unmöglich ist.

Der Punkt y liegt also zwischen a, b. Endlich ist

$$\begin{aligned}(cd-ab)ey &= (cd-ab)ea+(cd-ab)ay \\ &= ba.ac+cd.ay-ba.ay \\ &= ba.cy+cd.ay \\ &= by.yc+ay.yc+cd.ay \\ &= ay.yd+by.yc\end{aligned}$$

also auch $ay.yd+by.yc : by.yc = p+q : q$

folglich $ay.yd : by.yc = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$

mithin auch $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läſst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, y, b, c, d gegeben sind, ein sechster zwischen c, d finden, wenn $cd > ab$, so daſs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

Fall 2. (Fig. 65.)

Der Punkt x soll zwischen c, d so gefunden werden, daſs $ax.xc : bx.xd = p : q$.

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs $ax.xc : bx.xd = p : q$, so ist auch

$$ax.xc + bx.xd : bx.xd = p+q : q.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} ax.xc &= (ab+bx)xc \\ &= ab.cx + \begin{cases} bx.xc \\ bx.cd - bx.xd \\ bc.cd + cx.cd - bx.xd \end{cases} \\ &= (ab+cd)cx + bc.cd - bx.xd \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} ax.xc + bx.xd &= (ab+cd)cx + bc.cd \\ &= (ab+cd)(cx+ce), \text{ wenn } (ab+cd)ce = bc.cd \text{ gemacht wird;} \\ &= (ab+cd)ex \end{aligned}$$

mithin ist

$$(ab+cd)ex : bx.xd = p+q : q.$$

Da nun $(ab+cd)$, e, b, d, $p+q : q$, gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch I. Aufgabe III. Fall 2. zurückgeführt.

Construction.

Man mache $acf = R = abg$, $fc = cd$, $gb = ba$, ziehe fg, welche der bc begegne in e, nehme $ch = ab$, $ahp = R = cdq$, $hp = p$, $dq = q$, ziehe pq, welche der bd begegne in m, mache $bml = R = abk$, $lm = md$, $kb = be$, und beschreibe über kl als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit der verlängerten bm wird der gesuchte Punkt seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } hm : md &= hp : dq \\ &= p : q \end{aligned}$$

also $\left.\begin{array}{l} bd \\ ab+cd \end{array}\right\} : dm = p+q : q$. Mithin schneidet der über kl beschriebene Kreis die verlängerte bm so, dafs $(ab+cd)\, ex : bx.xd = p+q : q$. (Buch I. Aufgabe III. Fall 2.) Nun ist $p+q > p$

also ist auch $(ab+cd)ex > bx.xd$, folglich wird, da x immer zwischen e, d liegt, seyn $dx < dc$. Wo nicht, so wäre

entweder $dx = dc$

folglich $ex = ec$

mithin $(ab+cd)ex = (ab+cd)ec$.

Es ist aber $\left.\begin{array}{r} bg : cf \\ ab : cd \end{array}\right\} = be : ec$

also $ab+cd : cd = bc : ce$

mithin $(ab+cd)ce = bc.cd$

also wäre $(ab+cd)ex = bc.cd$

also auch $bx.xd = bc.cd$, welches unmöglich ist.

oder es wäre $dx > dc$

folglich $ex = ec - cx$

$$
\begin{aligned}
\text{mithin } (ab+cd)ex &= (ab+cd)ec - (ab+cd)cx \\
&= bc.cd - ab.cx - dc.cx \\
&= bx.xd + bx.cd - ab.cx - bx.xd \\
&= bx.xd - bx.xc - ab.cx \\
&= bx.xd - ax.xc
\end{aligned}
$$

folglich $(ab+cd)ex < bx.xd$, welches unmöglich ist. Es liegt also x zwischen c, d. Es ist mithin

$$(ab+cd)ex = (ab+cd)cx + \begin{cases}(ab+cd)ce\\ bc.cd\end{cases}$$
$$= (ab+cd)cx + bc.cd$$
$$= ab.cx + \begin{cases}(bc+cx)cd\\ bx.cd\end{cases} - bx.xd + bx.xd$$
$$= ax.xc + bx.xd$$

also ist auch $ax.xc + bx.xd : bx.xd = p+q : q$

folglich $ax.xc : bx.xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die von c entfernteren Punkte der Linie cd bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten cb ist

$$(ab+cd)ey : by.yd = p+q : q.$$

(Buch 1. Aufg. III. Fall 2. Zus. 2).

Es ist aber $p+q > q$

also ist auch $(ab+cd)ey > by.yd$.

Ferner ist $(ab+cd)ey = (ab+cd)cy \begin{cases}(ab+cd)ce\\ bc.cd\end{cases}$
$$= ab.cy + cd.yb$$

folglich $(ab+cd)ey - by.yd = ab.cy - (yd-dc)by$
$$= ab.cy - by.yc$$
$$= (ab-by)yc$$

folglich $ab > by$, das heifst, der Punkt y liegt zwischen a, b. Und es ist

$$(ab+cd)ey - by.yd = ay.yc.$$

Es ist aber $(ab+cd)ey - by.yd : by.yd = p : q$

folglich auch $ay.yc : by.yd = p : q$.

Zus 3. Es ist also

$$ax.xc : bx.xd = ay.yc : by.yd$$

folglich auch $ax.xc : ay.yc = bx.xd : by.yd$. Und es läſst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, y, b, c, d gegeben sind, zwischen c, d ein sechster x finden, so daſs

$$ax.xc : ay.yc = bx.xd : by.yd.$$

Fall 3. (Fig. 66. 67).

Der Punkt x soll zwischen c, d so gefunden werden, daſs $ax.xb : cx.xd = p : q$.

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$ax.xb : cx.xd = p : q$, so ist auch

$$ax.xb + cx.xd : cx.xd = p+q : q.$$

Es ist aber $ax.xb = (ac+cx)(bd-dx)$

$$= ac.bd + bd.cx - ac.dx - cx.xd$$

folglich

$$
\begin{aligned}
ax.xb + cx.xd &= ac.bd + bd.cx - ac.dc + ac.cx \\
&= ac.(bd - dc) + (bd + ca)cx \\
&= ac.cb + (bd+ca)cx \\
&= (bd+ca)(ce+cx), \text{ wenn } \\
& (bd+ca)ce = ac.cb \text{ gemacht wird;} \\
&= bd+ca)ex
\end{aligned}
$$

mithin auch $(bd+ca)ex : cx.xd = p+q : q$.

Da nun $(bd+ca)$, e, c, d, $p+q : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe III. Fall 3. reducirt.

Determination.

Vermöge Buch 1. Aufg. III. Fall 3. muſs seyn

$$
\begin{aligned}
p+q : q &\geqq (bd+ca) : de+ec-2\sqrt{de.ec}\\
&\geqq (bd+ca)(de+ec+2\sqrt{de.ec})\\
&\qquad : (de+ec-2\sqrt{de.ec})(de+ec+2\sqrt{de.ec})\\
&\geqq (bd+ca)\,de+(bd+ca)\,ec\\
&\quad +2\sqrt{(bd+ca)\,de\,(bd+ca)\,ec} : \begin{cases}(de+ec)^2-4de.ec\\ (de-ec)^2\\ cd^2\end{cases}
\end{aligned}
$$

Da nun e so bestimmt wird, daſs $(bd+ca)ce = ac.cb$, so ist $bd+ca : ac = bc : ce$

$$
\begin{aligned}
\text{folglich } bd+ac : bd &= bc : bc-ce\\
&= bc : be\\
&= bd+ac-cb : bd-be\\
&= bd+ab : de\\
&= ad : de
\end{aligned}
$$

also auch $(bd+ca)ed = ad.db$
mithin muſs seyn

$$
\begin{aligned}
p+q : q &\geqq ad.db+ac.cb+2\sqrt{ad.db.ac.cb} : cd^2\\
&\geqq ac.db+cd.db+ad.cb-dc.cb\\
&\qquad +2\sqrt{ad.db.ac.cb} : cd^2\\
&\geqq ac.db+ad.cb+cd^2+2\sqrt{ad.db.ac.cb} : cd^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also auch } p : q &\geqq ac.db+ad.cb+2\sqrt{ac.db.ad.cb} : cd^2\\
&\geqq (\sqrt{ac.db}+\sqrt{ad.cb})^2 : cd^2;
\end{aligned}
$$

welches die Simsonsche Determination ist.

Anmerkung.

Es ist $(\sqrt{ac.db}+\sqrt{ad.cb})(\sqrt{ac.db}-\sqrt{ad.cb})$

$$= ac.db - ad.cb$$
$$= ac.db - ad.db + ad.dc$$
$$= ad.dc - bd.dc$$
$$= ab.cd$$

folglich ist $\sqrt{ac.db}+\sqrt{ad.cb} : cd = ab : \sqrt{ac.db}-\sqrt{ad.cb}$, mithin kann die Determination auch so ausgedrückt werden, dafs $p : q \geqq ab^2 : (\sqrt{ac.db}-\sqrt{ad.cb})$ seyn müsse.

Construction.

Man mache $abf = R = bcg$, $bf = bd$, $cg = ca$, ziehe fg, welche der bc in e begegne, mache $al = cb$, $alp = R = ldg$, $lp = p$, $dq = q$, ziehe pq, welche der ld in m begegne, nehme $bco = cmn = R$, $co = ce$, $mn = md$ und beschreibe über mo als Durchmesser einen Kreis. Derselbe wird der Linie cd in dem gesuchten Punkte begegnen.

Beweis.

Es ist $p : q \geqq (\sqrt{ac.db}+\sqrt{ad.cb})^2 : cd^2$ (Determ.)

$$\geqq ac.db + ad.cb + 2\sqrt{ac.db.ad.cb} : cd^2$$

folglich $p+q : q \geqq ac.db + ad.cb + cd^2$

$$+ 2\sqrt{ac.db.ad.cb} : cd^2$$
$$\geqq ac.db + ad.cb + cd.db - cd.bc$$
$$+ \sqrt{ac.db.ad.cb} : cd^2$$
$$\geqq ad.db + ac.cb + 2\sqrt{ac.db.ad.cb} : cd^2$$

Nun ist $\left.\begin{matrix} bf : cg \\ bd : ca \end{matrix}\right\} = be : ec$ (El. VI. 4.)

folglich $bd+ca : ac = be+ec : ce$
$= bc : ce$

also sowohl

$ac.cb = (bd+ca)ce$, als $bd+ca : bd = bc : bc-ce$
$= bc : be$
$= bd+ca-bc : bd-be$
$= ad : de$

also $(bd+ca)de = ad.db$

mithin $p+q : q \overset{=}{>} (bd+ca)de+(bd+ca)ce$
$+2\sqrt{(bd+ca)de(bd+ca)ce} : cd^2$
$\overset{=}{>} (bd+ca)(de+ec+2\sqrt{de.ec})$
$: \begin{cases} cd^2 \\ (de-ec)^2 \\ (de+ec)^2-4\,de.ec \\ (de+ec-2\sqrt{de.ec})(de+ec+2\sqrt{de.ec}) \end{cases}$
$\overset{=}{>} bd+ca : de+ec-2\sqrt{de.ec}$

Auch ist $\left.\begin{matrix} lp : dq \\ p : q \end{matrix}\right\} = lm : md$

folglich $p+q : q = \begin{Bmatrix} lm+md \\ ld \\ bd+ca \end{Bmatrix} : md$

Also berührt, oder schneidet der über on als Durchmesser beschriebene Kreis die cd in x (Fig. 66.67), so daſs $(bd+ca)ex : cx.xd = p+q : q$

mithin $(bd+ca)ex-cx.xd = p : q$

Es ist aber $(bd+ca)ex = (bd+ca)ec+(bd+ca)cx$
$= ac.cb+(bd+ca)cx$
$= ac.bd-ac.cd+bd.cx+ac.cx$
$= ac.bd+bd.cx-ac.dx$
$= ax.bd-ac.dx$

folglich $(bd+ca)ex - cx.xd = ax.bd-(ac+cx)xd$
$$= ax.xb$$

also auch $ax.xb : cx.xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Für den in Fig. 66. bestimmten Punkt x verhält sich $ad.db : ac.cb = dx^2 : xc^2$. Dieser Punkt bestimmt ein kleineres Verhältnifs, als jeder andere Punkt der Linie cd. Die auf einerley Seite ihm näherliegenden Punkte bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit cd beweiset man eben so, wie für den Punkt x, dafs $ay.yb : cy.yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xb : cx.xd = ay.yb : cy.yd$

folglich auch $ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd$. Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, y, d gegeben sind, zwischen c, d ein sechster finden, so dafs

$$ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd.$$

Aufgabe III. (Fig. 68—75).

Auf der Verlängerung einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, d gegeben sind, einen fünften Punkt x zu finden, so dafs das Verhältnifs des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den übrigen gegebenen Punkten einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 68).

Der Punkt x soll so gefunden werden, dafs
$$ax.xb : cx.xd = p : q.$$

Analysis.

Er sey so gefunden, dafs $ax.xb:cx.xd = p:q$

so ist auch $ax.xb - cx.xd : cx.xd = p - q : q$.

Gedenkt man sich den Punkt e so bestimmt, dafs $ae.eb = ce.ed$, so ist

$ax.xb = (ae+ex)(be.ex)$ und $cx.xd = (xe-ec)(xe-ed)$

$= ae.eb + (ae+eb+ex)ex \quad = ce.ed - (ec+ed-ex)ex$

folglich $ax.xb - cx.xd = (ae+eb+ec+ed)ex$

$= (ac+bd)ex$

also auch $(ac+bd)ex:cx.xd = p-q:q$.

Nun sind $(ac+bd)$, e, c, d, $p-q:q$ gegeben. Also ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

Determination.

Da immer $ax.xb > cx.xd$, so mufs seyn $p > q$.

Construction.

Man mache $baf = R = ach$, $fa = ad$, $hc = cb$, ziehe hf, welche der ac in e begegne, nehme $ak = bd$, $akp = R$, $kp = p$, $cq = q$, ziehe pq, welche der verlängerten ac begegne in g, mache $cdl = cgm = R$, $dl = de$, $mg = gc$, und beschreibe über lm als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ad in dem gesuchten Punkte x schneiden wird.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{matrix} p \\ pk \end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix} q \\ cq \end{matrix}\right.$

also begegnet pq in ihrer Verlängerung der verlängerten ac. Es ist auch $kg:gc = kp:cq$

$= p:q$

folglich $\left.\begin{array}{l} kg-gc \\ kc \\ ac+ak \\ ac+bd \end{array}\right\} : cg = p-q : q$

mithin schneidet der über ml beschriebene Kreis die verlängerte dg in x so, dass

$(ac+bd).ex : cx.xd = p-q : q$ (Buch 1. Aufgabe IV. Fall 1).

Es ist aber $\left.\begin{array}{l} af : ch \\ ad : bc \end{array}\right\} = ae : ec$

also ist vermöge Buch 2. Aufg. I. Fall 1. *α.* die Linie bc in e so geschnitten, dass $ae.eb = ce.ed$. Und es ist

$$\begin{aligned}(ac+bd)ex &= (ae+ec+be+ed)ex \\ &= (ae+eb+ex)ex+(ce+ed-ex)ex \\ &= ae.eb+(ae+eb+ex)\,ex-ce.ed \\ &\quad +(ce+ed-ex)\,ex \\ &= (ae+ex)(be+ex)(xe-ec)(xe-ed) \\ &= ax.xb-cx.xd\end{aligned}$$

also ist auch $ax.xb-cx.xd : cx.xd = p-p : q$

folglich $ax.xb : cx.xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegenden Punkte der verlängerten ad bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. Zus. 2. ist für den Durchschnitt y des Kreises mit ec

$(ac+bd)ey : cy.yd = p-q : q$

Es ist aber

$$\begin{aligned}(ac+bd)\,ey &= (ae+ec+be+ed)\,ey \\ &= ae.eb+(ae+eb+ey)\,ey-ce.ed \\ &\quad +(ce+ed-ey\ ey \\ &= (ae+ey)(be+ey)-(ce-ey)(d-ey) \\ &= ay.yb-cy.yd.\end{aligned}$$

folglich ist $\overline{ay.yb} - \overline{cy.yd} : \overline{cy.yd} = p - q : q$

also auch $ay.yb : cy.yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $\overline{ax.xb : cx.xd = ay.yb : cy.yd}$

folglich auch $ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd$, und es läſst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, auf der Verlängerung ein sechster Punkt x finden, so daſs

$$ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd.$$

Fall 2. (Fig. 69).

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daſs

$$ax.xc : bx.xd = p : q.$$

Analysis.

Es sey derselbe so gefunden, daſs

$ax.xc : bx.xd = p : q$, so ist auch

$$\overline{ax.xc} - \overline{bx.xd} : \overline{bx.xd} = p - q : q.$$

Es sey der Punkt e so bestimmt, daſs

$ae.ec = be.ed$, so ist

$ax.xc = (ae + ex)(xe - ec)$, und $bx.xd = (be + ex)(xe - ed)$

$= (ae - ec + ex)\,ex - ae.ec$ $\quad = (be - ed + ex)\,ex - be.ed$

folglich $ax.xc - bx.xd = (ae - ec - be + ed)\,ex$

$= (ad - bc)\,ex$

also ist auch $(ad - bc)\,ex : bx.xd = p - q : q$.

Da nun $(ad - bc)$, e, b, d, $p - q : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe IV. Fall 2. zurückgeführt.

Determination.

Da immer $ax.xc > bx.xd$, so muſs seyn $p > q$.

Construction.

Man mache $baf = R = abh$, $fa = ad$, $hb = bc$, ziehe fh, welche der verlängerten ab in e begegne, nehme $ak = cd$, $akp = R$, $kp = p$, $bq = q$, ziehe pq, welche der verlängerten ab in g begegne, mache mgb = R = gdl, mg = gb, ld = de, und beschreibe über ml als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit der verlängerten ad wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix}p\\kp\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}q\\bq\end{matrix}\right.$$

also schneidet pq die verlängerte kb.

$$\text{Es ist auch } \left.\begin{matrix}kg : gb\\kb+bg : gb\end{matrix}\right\} \begin{matrix}= pk : qb\\= p : q\end{matrix}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}kb\\ka+ab\\cd+ab\\ad-bc\end{matrix}\right\} : bg = p-q : q$$

Mithin schneidet der über ml beschriebene Kreis die verlängerte bd in x, so dafs

$(ad-bc)\,ex : bx\,.\,xd = p-q : q$ (Buch 1. Aufg. IV. Fall 2). Es ist aber

$$\left.\begin{matrix}af : bh\\ad : bc\end{matrix}\right\} = ae : eb,$$ also ist vermöge Buch 2. Aufgabe I, Fall 2. α. die Linie bc in e so geschnitten, dafs $ae\,.\,ec = be\,.\,ed$. Es ist also

$$\begin{aligned}(ad-bc)\,ex &= (ae+ed-be-ec)\,ex\\ &= (ae-ec+ex)\,ex-(be-ed+ex)\,ex\\ &= (ae-ec+ex)\,ex-ae.ec-(be-ed+ex)\,ex+be.ed\\ &= (ae+ex)(xe-ec)-(be+ex)(xe-ed)\\ &= ax\,.\,xc-bx\,.\,xd\end{aligned}$$

folglich ist $ax\,.\,xc-bx\,.\,xd : bx\,.\,xd = p-q : q$

also auch $ax\,.\,xc : bx\,.\,xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegenden Punkte der verlängerten ad bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 2. Zu ist für den Durchschnitt y des Kreises mit be

$(ad-bc)ey : by \cdot yd = p-q : q$. Es ist aber

$$
\begin{aligned}
(ad-bc)\,ey &= (ae+ed-be-ec)\,ey \\
&= (ae-ec-ey)\,ey + ae \cdot ec \\
&\qquad -(be-ed-ey)\,ey - be \cdot \\
&= (ae-ey)(ec+ey)-(be-ey)(ed+ \\
&= ay \cdot yc - by \cdot yd
\end{aligned}
$$

also ist $ay \cdot yc - by \cdot yd : by \cdot yd = p-q : q$

mithin auch $ay \cdot yc : by \cdot yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax \cdot xc : bx \cdot xd = ay \cdot yc : by \cdot y$

folglich $ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx \cdot xd : by \cdot y$

Und es läfst sich, wenn in einer geraden Li fünf Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, ein sechs x in der Verlängerung von ad finden, so dafs

$$ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx \cdot xd : by \cdot yd.$$

Fall 3. (Fig. 70—75.)

Der Punkt x soll so angegeben werden, dafs

$$ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

a) Es sey $p = q$. (Fig. 70).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xd = bx \cdot xc$$

$$
\begin{aligned}
\text{so ist } bx : xd &= ax : xc \\
&= ax - xb : cx - xd \\
&= ab : cd.
\end{aligned}
$$

Da nun $ab : cd$ gegeben ist (Dat. 1), so ist au $bx : xd$ gegeben, folglich, da $bx - xd = bd$ gegeb ist, auch bx (Dat. 8), somit x gegeben.

Determination.

Da $ax > bx$ für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ad, so muſs auch $ab > cd$ seyn.

Construction.

Man mache unter einem beliebigen Winkel mit ac die Linien ae, cf einander parallel, nehme $ea = ab$, $fc = cd$, und ziehe ef. Die Verlängerung derselben wird die Verlängerung von ad in dem gesuchten Punkte x schneiden.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{array}{l} ab \\ ae \end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l} cd \\ cf \end{array}\right.$

also schneidet die Verlängerung von bd die verlängerte ac. Und es ist $ax : xc = ae : cf$

$$= ab : cd$$

Es ist aber $ax > ab$

also auch $cx > cd$, mithin liegt x in der Verlängerung von cd.

Ferner ist $ax : xc = ax - ab : xc - cd$

$$= bx : xd$$

folglich $ax . xd = cx . xb$.

b) Es sey nicht $p = q$. (Fig. 71—75).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax . xd : bx . xc = p : q.$$

Es ist $ax . xd = (ab + bx) xd$

$$= ab.dx \left\{\begin{array}{l} + bx.xd \\ + bx.xc \left\{\begin{array}{l} - bx.cd \\ - bd.dc - xd.dc \end{array}\right. \end{array}\right.$$

α) Ist nun $ab = cd$ (Fig. 71.), so ist

$$ax . xd = bx . xc - bd . dc$$

[illegible] $(ab-cd)\,cx+bx.xc=ab.dx+bx.xc-cd.bx$

$$=ab.dx+bx.xd$$

$$=ax.xd$$

[illegible] $ax.xd:bx.xc=p:q$.

[illegible] (Summ.) Der in Fig. 74 angegebene Be-[illegible] x bestimmt ein grösseres Verhältniſs, [illegible] andere Punkt der verlängerten ad. Für [illegible] $bx^2:cx^2=ab.bd:ac.cd$. Alle ihm auf der-[illegible] Seite näher liegenden Punkte bestimmen grös-[illegible] Verhältnisse, als die entfernteren.

[illegible] Für den zweiten Durchschnitt y des Krei-[illegible] der verlängerten ae (Fig. 75) läſst sich, wie [illegible] Punkt x, beweisen, daſs

$$ay.yd:by.yc=p:q.$$

[illegible] Es ist also $ax.xd:bx.xc=ay.yd:by.yc$

folglich $ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc$.

[illegible] läſst sich, wenn auf einer geraden Linie [illegible] a, b, c, d, y gegeben sind, und $ab>cd$, [illegible] $ay.yd>by.yc$ ist, ein sechster x auf der ver-[illegible] ad finden, so daſs

$$ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc,$$

Ferner ist $\left.\begin{array}{l} bx.xc - bd.dc \\ ab.dx \left\{\begin{array}{l} + bx.xc \left\{\begin{array}{l} - bd.dc - cd.dx \\ - bx.cd \end{array}\right. \\ + bx.xd \end{array}\right. \\ \quad ax.xd \end{array}\right\} : bx.xc = p : q.$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegenden Punkte der verlängerten ad bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten cb hat man

$$\begin{aligned} by.yc &= bf.cg \\ &= be.cd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } bd.dc : by.yc &= bd.dc : be.cd \\ &= db : be \\ &= q - p : q \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{l} bd.dc \\ ba.ac \end{array}\right\} < by.yc$$

$$\text{folglich } ba < by$$

das heifst, der Punkt y liegt in der verlängerten ba.

Ferner ist $\left.\begin{array}{l} by.yc - bd.dc \\ \left.\begin{array}{l} cd.dy - bd.dc \\ cd.by \end{array}\right\} + by.yc \\ \left.\begin{array}{l} \\ \quad by.yd \end{array}\right\} - ab.dy \\ \qquad ay.yd \end{array}\right\} : by.yc = p : q.$

Zus. 3. Es ist also $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc.$

$$\text{folglich } ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte y, a, b, c, d gegeben sind, und $ab = cd$ ist, in der verlängerten ad ein sechster finden, so dafs $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$

β) Ist $ab < cd$ (Fig. 72), so ist

$$ax.xd = bx.xc - bd.dc - (cd - ab)\,dx.$$

Man gedenke sich den Punkt e auf der verlängerten db so bestimmt, dafs $(cd - ab)\,de = bd.dc$, so ist

$$ax.xd = bx.xc - (cd - ab)(ed + dx)$$
$$= bx.xc - (cd - ab)\,ex$$

folglich $bx.xc - (cd - ab)\,ex : bx.xc = p : q$

mithin $(cd - ab)\,ex : bx.xc = q - p : q$.

Nun sind $cd - ab$, e, b, c, $p - q : q$ gegeben. Also ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

Determination.

Da $ax.xd = bx.xc - (cd - ab)\,ex$, so ist $ax.xd < bx.xc$, also mufs auch seyn $p < q$.

Construction.

Man nehme $abg = R = cdf$, $fd = dc$, $gb = ab$, ziehe fg, welche der verlängerten da in e begegne, nehme $am = cd$, $abq = amp = R$, $bq = q$, $mp = p$, ziehe qp, deren Verlängerung der verlängerten bc in h begegne, mache $bck = R = bhl$, $ck = ce$, $hl = hb$, und beschreibe über kl als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit der verlängerten ch wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{matrix} cd \\ df \end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix} ab \\ ag \end{matrix}\right.$ (p. hyp.)

also begegnet die Verlängerung von fg der verlängerten ba. Auch ist $\left.\begin{matrix} p \\ mp \end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix} q \\ qb \end{matrix}\right.$. Mithin schneidet die Verlängerung von qp die verlängerte bm. Und es

$$\text{ist } mh : hb = \left\{\begin{matrix} mp : qb \\ p : q \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} bh - hm \\ bm \\ cd - ab \end{matrix}\right\} : hb = q - p : q$$

Also schneidet der über kl beschriebene Kreis die verlängerte ch in x so, dass

$(cd - ab)\, ex : bx \,.\, xc = q - p : q$ (Buch 1. Aufg. IV. Fall 1.)

also ist $(cd - ab)\, ex < bx \,.\, xc$

mithin muss auch seyn $bx > bd$. Wo nicht, so wäre

entweder $bx = bd$

folglich $bx.xc = bd.dc$ und $(cd - ab)\, ed = (cd - ab)\, ex$

Es ist aber $\left.\begin{matrix} df : bg \\ dc : ab \end{matrix}\right\} = de : eb$

folglich $cd - ab : cd = de - eb : de$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = db : de$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} (cd - ab)\, de \\ (cd - ab)\, ex \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} bd \,.\, dc \\ bx \,.\, xc \end{matrix}\right.$$

welches unmöglich ist.

Oder es wäre $bx < bd$

$$\begin{aligned} \text{folglich wäre } (cd - ab)\, ex &= (cd - ab)\, ed - (cd - ab)\, dx \\ &= bd \,.\, dc - cd \,.\, dx + ab \,.\, dx \\ &= bx \,.\, dc + ab \,.\, dx \end{aligned}$$

also auch $bx.xc - (cd - ab) ex = bx.xc - bx.dc - ab.dx$

$$\begin{aligned} \text{folglich } bx.xc &= (cd - ab)\, ex + bx \,.\, xc - bx \,.\, dc - ab \,.\, dx \\ &= (cd - ab)\, ex - bx \,.\, xd - ab \,.\, dx \\ &= (cd - ab)\, ex - ax \,.\, xd \end{aligned}$$

mithin $bx \cdot xc < (cd - ab)\, ex$, welches unmöglich ist.

Es ist also $bx > bd$, das heifst der Punkt x liegt in der Verlängerung von ad.

Ferner ist $(cd - ab)\, ex = (cd - ab)\, ed + (cd - ab)\, dx$

$$= bd \cdot dc + cd \cdot dx - ab \cdot dx$$
$$= bx \cdot cd - ab \cdot dx$$

folglich auch $bx \cdot cd - ab \cdot dx : bx \cdot xc = q - p : q$

$$\text{also } \underbrace{\underbrace{bx \cdot xc - bx \cdot cd}_{bx \cdot xd} + ab \cdot dx}_{ax \cdot xd} : bx \cdot xc = p : q$$

Zus. 1. (Sims.) Die von d entfernteren Punkte der verlängerten ad bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. Zus. 2. ist für den Durchschnitt y des Kreises mit be gleichfalls $(cd - ab)\, ey : by \cdot yc = q - p : q$

folglich ist auch $by \cdot yc - (cd - ab)\, ey : by \cdot yc = p : q$.

Es ist aber $(cd - ab)\, ey = (cd - ab)\, de - (cd - ab)\, dy$

$$= bd \cdot dc - cd \cdot dy + ab \cdot dy$$
$$= ab \cdot dy - cd \cdot by \text{; folglich}$$

ist auch $by \cdot yc - (cd - ab)\, ey = by \cdot yc - ab \cdot dy + cd \cdot by$

$$= by \cdot yd - ab \cdot dy$$
$$= (by - bd)\, dy$$

Nun ist $by \cdot yc > (cd - ab)\, ey$, wegen $q > q - p$

also ist auch $by > ab$, das heifst, der Punkt y liegt in der Verlängerung von ba. Und es ist

$$\underbrace{(by - ba)\, dy}_{ay \cdot yd} : by \cdot yc = p : q.$$

Zus. 3. Es verhält sich also

$$\overline{ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc}$$

folglich $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte y, a, b, c, d gegeben sind und $ab < cd$ ist, auf der Verlängerung von ad ein sechster Punkt x finden, so dafs $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

γ) Ist $ab > cd$ (Fig. 73), so ist

$$ax.xd = (ab - cd)dx + bx.xc - bd.dc.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt e so bestimmt, dafs $\overline{(ab-cd)de = bd.dc}$, so ist

$$ax.xd = (ab-cd)dx + bx.xc - (ab-cd)de$$

1.) Ist nun $\overline{p < q}$

so ist auch $\overline{ax.xd < bx.xc}$

folglich $ax.xd = bx.xc \begin{cases} -(ab-cd)(ed-dx) \\ -(ab-cd)ex \end{cases}$

mithin $\overline{bx.xc - (ab-cd)ex : bx.xc = p : q.}$

also $(ab-cd)ex : bx.xc = q - p : q$.

Nun sind $(ab - cd)$, e, b, x, $q - p : q$ gegeben. Also ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. III. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man nehme $abf = R = adg$, $bf = ba$, $dg = dc$, ziehe fg, welche der verlängerten cd in e begegne, mache $dm = ab$, $bcq = R = bmp$, $cq = q$, $mp = p$, ziehe qp, welche die verlängerte cm in h schneide, nehme $bhk = R$, $kh = hc$, $lb = be$ und beschreibe über lk als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit der verlängerten hb wird der gesuchte Punkt seyn.

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = d = af$, so ist $\left.\begin{matrix} ax^2 - ae^2 \\ (ax + ae)(ax - ae) \\ fx . xe \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da nun e, f, b, p : q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 1. reducirt.

b.) dafs $ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 77.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q.$$

Man gedenke sich be=bf so bestimmt, dafs $p:q = d^2 : \left\{\begin{matrix} be^2 \\ bf^2 \end{matrix}\right.$

so ist $ax^2 + d^2 : bx^2 = d^2 : be^2$

folglich auch $ax^2 : \left\{\begin{matrix} bx^2 - be^2 \\ (bx + be)(bx - be) \\ ex . xf \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = d^2 : be^2 \\ \\ = p : q. \end{matrix}$

Da nun a, f, e, p : q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 1. reducirt.

c.) dafs $d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 78.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = d = af$, so ist $\left.\begin{matrix} ae^2 - ax^2 \\ (ae + ax)(ae - ax) \\ fx . xe \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da nun f, e, b, p:q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf $\left\{\begin{matrix} \text{Buch 1. Aufg. V.} \left\{\begin{matrix} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$ reducirt, je

l) ex=(ab—cd) ed+(ab—cd) dx
=bd . dc+(ab—cd) dx, mithin

=bx.xc—bd.dc—(ab—cd) dx
=bx.xc—bd.dc—ab.dx+cd.dx
bx . xc—ab . dx—bx . cd

b—cd) ex—bx . xd—ab . dx
—cd) ex—ax . xd

—cd) ex, welches unmög-

heifst, der Punkt x liegt

—cd) de—(ab—cd) dx
lc—ab . dx+cd . dx
=bx . cd—ab . dx, folglich

—(ab—cd) ex=bx . xc—bx . cd+ab . dx
=bx . xd+ab . xd
=ax . xd

also (ab—cd) ex=bx . xc—ax . xd

mithin bx . xc—ax . xd : bx . xc=q—p : q

folglich auch ax . xd : bx . xc=p : q.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegen-
en Punkte der verlängerten a d bestimmen kleinere
erhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. III. Fall 1. Zus 2.
t für den Durchschnitt y des Kreises mit der ver-
ngerten c b gleichfalls

(ab—cd) ey : by . yc=q—p : q

also ist (ab—cd) ey<by . yc und
by . yc—(ab—cd) ey : by . yc=p : q

Es ist aber $(ab-cd)ey=(ab-cd)dy+(ab-cd)de$
$=ab.dy-cd.dy+bd.dc$
$=ab.dy-dc.by$

folglich $by.yc-(ab-cd)ey=by.yc-ab.dy+dc.by$
$=by.yd-ab.dy$
$=(by-ba)dy$

also ist $by>ba$, das heifst, der Punkt y liegt in der verlängerten ba, und es ist

$$\left.\begin{matrix}(by-ba)dy\\ ay.yd\end{matrix}\right\} : by.yc=p:q$$

Zus. 3. Es ist also $ax.xd:bx.xc=ay.yd:by.yc$

folglich $ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc.$

Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte y, a, b, c, d gegeben sind, und $ab>cd$, auch $ay.yd<by.yc$ ist, in der Verlängerung von ad ein sechster Punkt x finden, so dafs

$$ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc.$$

2.) Ist $p>q$, (Fig. 74. 75.)

so ist $ax.xd>bx.xc$

folglich $ax.xd=bx.xc+(ab-cd)(dx-de)$
$=bx.xc+(ab-cd)ex$

mithin $bx.xc+(ab-cd)ex:bx.xc=p:q$

also $(ab-cd)ex:bx.xc=p-q:q.$

Da nun $ab-cd$, e, b, c, $p-q:q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe IV. Fall 3, reducirt.

Determination.

Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 3. Determ. mufs

$$\text{seyn } p-q:q \overset{=}{>} ab-cd : be+ec+2\sqrt{be.ec}$$

$$\overset{=}{>} (ab-cd)(be+ec-2\sqrt{be.ec})$$
$$: (be+ec+2\sqrt{be.ec})(be+ec-2\sqrt{be.ec})$$

$$\overset{=}{>} (ab-cd)\,be+(ab-cd)\,ec$$
$$-2\sqrt{(ab-cd)\,be\,(ab-cd)\,ec} : \left\{\begin{array}{l}(be+ec)^2-4\,be.ec\\ (be-ec)^2\\ bc^2.\end{array}\right.$$

Es soll aber der Punkt e so bestimmt werden, daſs $(ab-cd) : dc = bd : de$, folglich ist sowohl

$ab-cd : ab = bd : bd+de$, als auch $ab-cd : dc = ac : cd+de$
$= bd : be$ $\qquad\qquad = ac : ce$

also sowohl
$(ab-cd)\,be = ab.bd$, als auch $(ab-cd)\,ce = ac.cd$
Mithin muſs seyn

$$p-q:q \overset{=}{>} ab.bd+ac.cd-2\sqrt{ab.bd.ac.cd} : bc^2$$

$$\overset{=}{>} ab.bd+ab.cd+\left\{\begin{array}{c}bc.cd\\ bc.bd-bc^2\end{array}\right\}$$
$$-2\sqrt{ab.bd.ac.cd} : bc^2.$$

$$\text{folglich auch } p:q \overset{=}{>} ac.bd+ab.cd-2\sqrt{ab.bd.ac.cd} : bc^2$$

$$\overset{=}{>} (\sqrt{ac.bd}-\sqrt{ab.cd})^2 : bc^2$$

Anmerkung.

Es ist $(\sqrt{ac.bd}-\sqrt{ab.cd})\sqrt{(ac.bd+\sqrt{ab.cd})}$

$$= ac.bd\left\{\begin{array}{l}-ab.cd\\ -ab.bd+ab.bc\end{array}\right.$$
$$= cb.bd+ab.bc$$
$$= ad.bc$$

folglich $\sqrt{ac.bd}-\sqrt{ab.cd}:bc=ad:\sqrt{ac.bd}+\sqrt{ab.cd}$

folglich mufs auch seyn $p:q \overset{=}{>} ad^2:\sqrt{ac.bd}+\sqrt{ab.cd}$, welches die Simsonsche Determination ist.

Construction.

Man mache $abf=R=adm$, $fb=ba$, $md=dc$, ziehe fm, welche der verlängerten bd in e begegne, nehme $ah=cd$, $bhp=R=hbq$, $hp=p$, $bq=q$, ziehe pq, welche die verlängerte hb in k schneide, mache $bkl=R=bcg$, $kl=kc$, $cg=ce$, und beschreibe über gl als Durchmesser einen Kreis, welcher der verlängerten bd in dem gesuchten Punkte x begegnen wird.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{matrix}ab\\bf\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}cd\\dm\end{matrix}\right.$, also begegnet die Verlängerung von fm der verlängerten bd, und es ist

$$\left.\begin{matrix}bf:dm\\ab:cd\end{matrix}\right\}=be:ed$$

$$\text{folglich } ab-cd:dc=be-ed:de$$
$$=bd:de \qquad \text{also}$$

$$ab-cd:ab=bd:bd+de, \text{ u. } ab-cd:cd=ab-cd+bd:cd+de$$
$$=bd:be \qquad\qquad =ac:ce$$

mithin ist $(ab-cd)be=ab.bd$, und $(ab-cd)ce=ac.cd$.

Ferner ist $\left.\begin{matrix}p\\hp\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}q\\bq\end{matrix}\right.$, also begegnet die Verlängerung von pq der verlängerten hb, und es ist

$$\left.\begin{matrix}hp:bq\\p:q\end{matrix}\right\}=hk:kb$$

$$\text{also } p-q : q = hk - kb : bk$$
$$= \left\{\begin{matrix} hb \\ ab-cd \end{matrix}\right\} : bk$$

Ueberdieſs ist

$$p : q \geqq (\sqrt{ac.bd} - \sqrt{ab.cd})^2 : bc^2 \text{ (Determ.)}$$
$$\geqq ac.bd + ab.cd - 2\sqrt{ac.bd.ab.cd} : bc^2, \text{ folglich}$$

$$p-q : q \geqq ac.bd + ab.cd - bc^2 - 2\sqrt{ac.bd.ab.cd} : bc^2$$
$$\geqq ab.bd + \left\{\begin{matrix} cb.bd - bc^2 \\ bc.cd \end{matrix}\right\} + ab.cd - 2\sqrt{ab.bd.ac.cd} : bc^2$$
$$\geqq ab.bd + ac.cd - 2\sqrt{ab.bd.ac.cd} : bc^2$$
$$\geqq (ab-cd)be + (ab-cd)ce - 2\sqrt{(ab-cd)be.(ab-cd)ce} : bc^2$$
$$\geqq (ab-cd)(be + ec - 2\sqrt{be.ec}) ..$$
$$: \left\{\begin{matrix} (be-ec)^2 \\ (be+ec)^2 - 4.be.ec \\ (be+ec+2\sqrt{be.ec})(be+ec-2\sqrt{be.ec}) \end{matrix}\right.$$
$$\geqq ab-cd : be+ec+2\sqrt{be.ec}.$$

Mithin berührt (Fig. 74), oder schneidet (Fig. 75), den über gl als Durchmesser beschriebene Kreis die verlängerte be in einem Punkte x so, daſs $(ab-cd)ex : bx.xc = p-q : q$. (Buch 1. Aufg. IV. Fall 3.)

---

also auch $(ab-cd)ex + bx.xc : bx.xc = p : q$.

Es ist aber
$$(ab-cd)ex = (ab-cd)dx - (ab-cd)de$$
$$= ab.dx - cd.dx - bd.dc$$
$$= ab.dx - cd.bx$$

folglich ist $(ab-cd)ex+bx.xc=ab.dx+bx.xc-cd.bx$

$$=ab.dx+bx.xd$$

$$=ax.xd$$

also auch $ax.xd:bx.xc=p:q$.

Zus. 1. (Sims.) Der in Fig. 74. angegebene Berührungspunkt x bestimmt ein grösseres Verhältnifs, als jeder andere Punkt der verlängerten ad. Für ihn ist $bx^2:cx^2=ab.bd:ac.cd$. Alle ihm auf derselben Seite näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten ae (Fig. 75) läfst sich, wie für den Punkt x, beweisen, dafs

$$ay.yd:by.yc=p:q.$$

Zus. 3. Es ist also $ax.xd:bx.xc=ay.yd:by.yc$

folglich $ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc$.

Und es läfst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, d, y gegeben sind, und $ab>cd$, auch $ay.yd>bx.xc$ ist, ein sechster x auf der verlängerten ad finden, so dafs

$$ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc,$$

Der Bücher

de sectione determinata

Drittes.

Des ROBERT SIMSON

erstes Buch

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig. 76—83.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, einen dritten Punkt x zu finden, so daſs das Verhältniſs von dem Unterschiede, oder der Summe des Quadrates des Segmentes zwischen x und einem der gegebenen Punkte und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie d zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem anderen Punkte einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 76. 77. 78.)

Der Punkt x soll zwischen a, b gefunden werden,

a) so daſs $ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 76.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = d = af$, so ist

$$\left.\begin{matrix} ax^2 - ae^2 \\ (ax+ae)(ax-ae) \\ fx \,.\, xe \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$$

Da nun e, f, b, p : q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 1. reducirt.

b.) dafs $ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 77.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q.$$

Man gedenke sich $be = bf$ so bestimmt, dafs $p : q = d^2 : \left\{\begin{matrix} be^2 \\ bf^2 \end{matrix}\right.$

$$\underline{\text{so ist } ax^2 + d^2 : bx^2 = d^2 : be^2}$$

folglich auch $ax^2 : \left\{\begin{matrix} bx^2 - be^2 \\ (bx+be)(bx-be) \\ ex \,.\, xf \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = d^2 : be^2 \\ \\ = p : q. \end{matrix}$

Da nun a, f, e, p : q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 1. reducirt.

c.) dafs $d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 78.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = d = af$, so ist

$$\left.\begin{matrix} ae^2 - ax^2 \\ (ae+ax)(ae-ax) \\ fx \,.\, xe \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$$

Da nun f, e, b, p:q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf $\left\{\begin{matrix} \text{Buch 1. Aufg. V.} \left\{\begin{matrix} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$ reducirt, je nachdem der Punkt e $\left\{\begin{array}{l}\text{zwischen a, b}\\ \text{in der Verlängerung von ab}\\ \text{in b}\end{array}\right\}$ liegt.

Fall 2. (Fig. 78 ½. 79. 80.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab gefunden werden,

a.) dafs $ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 78 ½.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man ae=d=af, so wird $\left.\begin{array}{r} ax^2 - ae^2 \\ (ax + ae)(ax - ae) \\ fx \, . \, xe \end{array}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da f, e, b, p : q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf $\left\{\begin{array}{l}\text{Buch 1. Aufg. VI.} \left\{\begin{array}{l}\text{Fall 1.}\\ \text{Fall 3.}\end{array}\right\}\\ \text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem der Punkt e $\left\{\begin{array}{l}\text{zwischen a, b}\\ \text{in der Verlängerung von ab}\\ \text{in b}\end{array}\right\}$ liegt.

b.) dafs $ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 79).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich be, bf so bestimmt, dafs $p : q = d^2 : be^2$, so ist $ax^2 + d^2 : bx^2 = d^2 : be^2$

also auch $ax^2 : \left\{\begin{array}{c} bx^2 - be^2 \\ (bx + be)(bx - be) \\ fx \, . \, xe \end{array}\right\} \begin{array}{l} = d^2 : be^2 \\ = p : q. \end{array}$

Da a, f, e, p : q gegeben sind, so ist die Aufgabe

$$\text{auf} \left\{\begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. VI.} \left\{\begin{array}{l} \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 3.} \end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\} \text{zurück geführt,}$$

$$\text{je nachdem der Punkt } f \left\{\begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } a \end{array}\right\}$$

liegt.

e.) dafs $d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 80.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = af = d$, so wird $\left.\begin{array}{r} ae^2 - ax^2 \\ fx \cdot xe \end{array}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da f, e, b, p : q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 2. reducirt.

Fall 3. (Fig. 81. 82. 83.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab gefunden werden,

a.) dafs $bx^2 - d^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 81.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx^2 - d^2 : ax^2 = p : q.$$

Macht man $be = bf = d$, so wird $\left.\begin{array}{r} bx^2 - be^2 \\ fx \cdot xe \end{array}\right\} : ax^2 = p : q.$

Da f, e, a, p : q gegeben sind, so ist dieser Fall

$$\text{auf} \left\{\begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. VI.} \left\{\begin{array}{l} \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 3.} \end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\} \text{zurückgeführt,}$$

$$\text{je nachdem der Punkt } f \left\{\begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } a \end{array}\right\}$$

liegt.

b.) dafs $bx^2 + d^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 82.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx^2 + d^2 : ax^2 = p : q.$$

Bestimmt man $ae = af$ so, dafs $p : q = d^2 : ae^2$, so wird $bx + d^2 : ax^2 = d^2 : ae^2$

$$\text{also auch } bx^2 : \left\{\begin{matrix} ax^2 - ae^2 \\ fx.xe \end{matrix}\right\} = p : q.$$

Da b, f, e, p : q gegeben sind, so ist dieser Fall auf $\left\{\begin{matrix} \text{Buch. 1. Aufg. VI.} \left\{\begin{matrix} \text{Fall 1.} \\ \text{Fall 3.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$ zurückgeführt,

je nachdem der Punkt e $\left\{\begin{matrix} \text{zwischen a,b} \\ \text{in der Verlängerung von ab} \\ \text{in b} \end{matrix}\right\}$ liegt.

c.) dafs $d^2 - bx^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 83.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d^2 - bx^2 : ax^2 = p : q.$$

Macht man $be = d = bf$, so wird $\left\{\begin{matrix} bf^2 = bx^2 \\ fx.xe \end{matrix}\right\} : ax^2 = p : q.$

Da f, e, a, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{matrix} \text{Buch 1. Aufg. V.} \left\{\begin{matrix} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$ zurückgeführt, je

nachdem der Punkt e $\left\{\begin{matrix} \text{zwischen a,b} \\ \text{auf der Verlängerung von ba} \\ \text{in a} \end{matrix}\right\}$ liegt.

Aufgabe II. (Fig. 84—92.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a,b gegeben sind, einen dritten x zu finden, so dass das Verhältniss des Unterschiedes, oder der Summe des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem jener Punkte, und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Quadrat des Segmentes zwischen x und dem anderen Punkte einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 84. 85. 86.)

Der Punkt x soll zwischen a,b liegen,

a.) so dass $d.ax - e^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 84.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dass

$$d.ax - e^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $d.ag = e^2$, so ist $\left.\begin{matrix} d.ax - d.ag \\ d.gx \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da d, g, b, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. II. Fall 1. zurückgeführt.

b.) dass $d.ax + e^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 85.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dass

$$d.ax + e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dass

$d.af = e^2$, so ist $\left.\begin{matrix} d.ax + d.af \\ d.fx \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da d, f, b, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. II. Fall 1. zurückgeführt.

c.) dass $e^2 - d.ax : bx^2 = p : q$. (Fig. 86.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - d \cdot ax : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$$d \cdot af = e^2, \text{ so ist } \underbrace{d \cdot af - d \cdot ax}_{d \cdot fx} : bx^2 = p : q.$$

Da d, f, b, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{Buch. 1. Aufg. II. Fall 2. } \left\{\begin{array}{l}a\\ b\end{array}\right\} \\ \\ \text{Dat 2.}\end{array}\right\}$ zurückgeführt, je nachdem der Punkt f $\left\{\begin{array}{l}\text{zwischen } a,b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } b\end{array}\right\}$ liegt.

Fall 2. (Fig. 87. 88. 89.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab liegen,

a.) so daſs $d \cdot bx - e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 87.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d \cdot bx - e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$$d \cdot bf = e^2, \text{ so ist } \underbrace{d \cdot bx - d \cdot bf}_{d \cdot fx} : ax^2 = p : q.$$

Da d, f, a, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. Aufg. II. Fall 2. a. zurückgeführt.

b) daſs $d \cdot bx^2 + e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 88.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d \cdot bx + e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$$d \cdot bf = e^2, \text{ so ist } \underbrace{d \cdot bx + d \cdot bf}_{d \cdot fx} : ax^2 = p : q.$$

Da d, f, a, p : p gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{matrix} \text{B. 1. A. II. F. 2.} \left\{\begin{matrix}\text{a.}\\ \text{b.}\end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 2.}\end{matrix}\right\}$ zurückgeführt, je nachdem der Punkt f $\left\{\begin{matrix}\text{zwischen a,b}\\ \text{in der Verlängerung von ab}\\ \text{in a}\end{matrix}\right\}$ liegt.

c.) daſs $e^2 - d \cdot bx : ax^2 = p : q.$ (Fig. 89)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - d \cdot bx : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$$d \cdot bf = e^2, \text{ so ist } \underbrace{d \cdot bf - d \cdot bx}_{d \cdot fx} : ax^2 = p : q.$$

Da d, f, a, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. II. F. 1. zurückgeführt.

Fall 3. (Fig. 90. 91. 92.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab liegen,

a.) so daſs $d : ax - e^2 : bx^2 = p : q.$ (Fig. 90.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d : ax - e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$$d \cdot af = e^2, \text{ so ist } \underbrace{d \cdot ax - d \cdot af}_{d \cdot fx} : bx^2 = p : q.$$

Da d, f, b, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{B. 1. Aufg. II. F. 2.}\left\{\begin{array}{l}a\\ b\end{array}\right\}\\ \text{Dat. 2.}\end{array}\right\}$ zurückgeführt, je nachdem der Punkt f $\left\{\begin{array}{l}\text{in der Verlängerung von ab}\\ \text{zwischen a, b}\\ \text{in b}\end{array}\right\}$ liegt.

b) dafs $d.ax+e^2 : bx^2 = p : q$. (fig. 91.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.ax+e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.af = e^2$, so ist $\left.\begin{array}{l}d.ax+d.af\\ d.fx\end{array}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da d, f, b, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. II. F. 2. b. zurückgeführt.

c) dafs $e^2 - d.ax : bx^2 = p : q$. (Fig. 92.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - d.ax : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.af = e^2$, so ist $\left.\begin{array}{l}d.af-d.ax\\ d.fx\end{array}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da d, f, b, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. II. F. 1. zurückgeführt.

Aufgabe III. (Fig. 93—101.)

Zwischen dem mittleren und einem der äusseren von drey auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c, einen vierten x zu finden, so dafs das Verhältnifs von dem Unterschiede, oder der Summe des Rechtecks aus einer gegebenen geraden Linie d und dem Segmente zwischen x und einem jener Punkte, und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den beiden anderen Punkten einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 93. 94. 95).

Der Punkt x soll zwischen a, b angegeben werden,

a) daſs $d.ax - e^2 : bx.xc = p : q$. (fig. 93.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d.ax - e^2 : bx.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$d.af = e^2$, so ist $\underbrace{d.ax - d.af}_{d.fx} : bx.xc = p : q$.

Da d, f, b, c, p : q gegeben sind, so ist dieser Fall auf B. 1. A. III. F. 1. reducirt.

b) daſs $d.ax + e^2 : bx.xc = p : q$. (fig. 94.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d.ax + e^2 : bc.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$d.af = e^2$, so ist $\underbrace{d.ax + d.af}_{d.fx} : bc.xc = p : q$.

Da d, f, b, c, p : q gegeben sind, so ist auch dieser Fall auf B. 1. A. III. F. 1. reducirt.

c) daſs $e^2 - d.ac : bc.xc = p : q$. (fig. 95.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - d.ax : bc.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$d.af = e^2$, so ist $\underbrace{d.af - d.ax}_{d.fx} : bx.xc = p : q$.

Da nun d, f, b, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. IV.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 3.}\\ \text{F. 2.}\\ \text{F. 1.}\end{array}\right\} \\ \qquad\qquad \text{Dat. 2.} \\ \qquad\qquad \text{Dat. 2.} \end{array}\right\}$$

zurückgführt, wenn der

$$\text{Punkt f} \left\{\begin{array}{l} \text{zwischen} \left\{\begin{array}{l}\text{a, b}\\ \text{b, c}\end{array}\right\} \\ \text{in der Verlängerung von ac.} \\ \text{in b} \\ \text{in c} \end{array}\right\} \text{liegt.}$$

Fall 2. (Fig. 96. 97. 98.)

Der Punkt x soll zwischen a, b gefunden werden,

b) daſs $d.bx - e^2 : ax.xc = p : q$. (fig. 96.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d.bx - e^2 : ax.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs $d.bf = e^2$, so ist

$$\left.\begin{array}{l} d.bx - d.bf \\ \qquad d.fx \end{array}\right\} : ax.xc = p : q.$$

Da d, a, f, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. III. F. 2. reducirt.

b) daſs $d.bx + e^2 : ax.xc = p : q$ (fig. 97.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d.bx + e^2 : ax.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs $d.bf = e^2$, so ist

$$\left.\begin{array}{l} d.bx + d.bf \\ \qquad d.fx \end{array}\right\} : ax.xc = p : q.$$

Da d, a, f, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{B. 1. A. III.}\left\{\begin{array}{l}\text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\}\\ \qquad\text{Dat. 2.}\end{array}\right\}$ reducirt, wenn der Punkt f $\left\{\begin{array}{l}\text{zwischen b, c}\\ \text{in der Verlängerung von bc}\\ \text{in c}\end{array}\right\}$ liegt.

c) dafs $e^2 - d.bx : ax.xc = p:q$. (fig. 98.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - d.bx : ax.xc = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.bf = e^2$, so ist $\left.\begin{array}{l}d.bf - d.bx\\ d.fx\end{array}\right\} : ax.xc = p:q.$

Da d, a, f, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{B. 1. A. III.}\left\{\begin{array}{l}\text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\}\\ \qquad\text{Dat. 2.}\end{array}\right\}$ reducirt, wenn der Punkt f $\left\{\begin{array}{l}\text{zwischen a, b}\\ \text{in der Verlängerung von ba}\\ \text{in a}\end{array}\right\}$ liegt.

Fall 3. (Fig. 99. 100. 101.)

Der Punkt x soll zwischen a, b gefunden werden,

a) dafs $d.cx - e^2 : ax.xb = p:q$. (fig. 99.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.cx - e^2 : ax.xb = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.cf = e^2$, so ist $\left.\begin{array}{l}d.cx - d.cf\\ d.fx\end{array}\right\} : ax.xb = p:q.$

Da nun d, a, b, f, $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. III.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\} \\ \qquad\quad \text{Dat. 2.} \end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem der Punkt f $\left\{\begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \quad - \qquad b, c \\ \text{in } b \end{array}\right\}$ liegt.

b) daſs $d.cx+e^2 : ax.xb = p:q$. (fig. 100.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d.cx+e^2 : ax.xb = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$$d.cf = e^2, \text{ so ist } \left.\begin{array}{l} d.cx+d.cf \\ \quad d.fx \end{array}\right\} : ax.xb = p:q.$$

Da d, a, b, f, $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. III. F. 3. zurückgeführt.

c) daſs $e^2-d.cx : ax.xb = p:q$. (fig. 101.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2-d.cx : ax.xb = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$$d.cf = e^2, \text{ so ist } \left.\begin{array}{l} d.cf-d.cx \\ \quad d.fx \end{array}\right\} : ax.xb = p:q.$$

Da d, a, f, b, $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. III,} \left\{\begin{array}{l}\text{Fall 2.}\\ \text{Fall 3.}\end{array}\right\} \\ \qquad\qquad \text{Dat. 2.} \end{array}\right\}$ zurück geführt.

je nachdem der Punkt f $\left\{\begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } a \end{array}\right\}$ liegt.

Aufgabe IV. (Fig. 102—110.)

Auf der Verlängerung einer geraden Linie ac, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, einen vierten Punkt x zu finden, so daſs das Verhältniſs von dem Unterschiede, oder der Summe des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem jener Punkte, und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse p:q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 102—104.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daſs $d.ax - e^2 : bx.xc = p:q$. (Fig. 102.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$d.ax - e^2 : bx.xc = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs

$d.af = e^2$, so ist $\left.\begin{array}{c} d.ax - d.af \\ d.fx \end{array}\right\} : bx.xc = p:q.$

Da nun d, f, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. IV.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 1.}\\ \text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\} \\ \quad\text{Dat. 2.} \\ \quad\text{Dat. 2.} \end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem der Punkt f $\left\{\begin{array}{l} \text{zwischen a, b} \\ \text{— b, c} \\ \text{auf die Verlängerung von ac} \\ \text{in b} \\ \text{in c} \end{array}\right\}$ fällt.

b) dafs $d.ax+e^2:bx.xc=p:q$. (Fig. 103.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.ax+e^2:bx.xc=p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$d.af=e^2$, so ist $\underbrace{d.ax+d.af}_{d.fx}:bx.xc=p:q.$

Da d, f, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

c) dafs $e^2-d.ax:bx.xc=p:q$. (Fig. 104.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2-d.ax:bx.xc=p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$d.af=e^2$, so ist $\underbrace{d.af-d.ax}_{d.fx}:bx.xc=p:q.$

Da d, b, c, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. III. F. 1. reducirt.

Fall 2. (Fig. 105—107.)

Der Punkt x soll so gefunden werden,

a) dafs $d.bx-e^2:ax.xc=p:q$. (Fig. 105.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.bx-e^2:ax.xc=p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$d.bf=e^2$, so ist $\underbrace{d.bx-d.bf}_{d.fx}:ax.xc=p:q.$

Da d, a, f, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{Buch 1. Aufg. IV.} \left\{\begin{array}{l}\text{Fall 2.}\\ \text{Fall 3.}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$ reducirt, je

Dat. 2.

nachdem der Punkt f $\left\{\begin{array}{l}\text{zwischen } b, c\\ \text{in die Verlängerung von } bc\\ \text{in } c\end{array}\right\}$ fällt.

b.) dafs $d.bx+e^2 : ax.xc = p:q$. (Fig. 106.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.bx+e^2 : ax.xc = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.bf = e^2$, so ist $\left.\begin{array}{l}d.bx+d.bf\\ d.fx\end{array}\right\} : ax.xc = p:q.$

Da d, f, a, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{Buch 1. Aufg. IV.}\\ \text{Dat. 2.}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Fall 2.}\\ \text{Fall 1.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem der Punkt f $\left\{\begin{array}{l}\text{zwischen } a, b\\ \text{in die Verlängerung von } ba\\ \text{in } a\end{array}\right\}$ fällt.

c.) dafs $e^2-d.bx : ax.xc = p:q$. (Fig. 107.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2-d.bx : ax.xc = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.bf = e^2$, so ist $\left.\begin{array}{l}d.bf-d.bx\\ d.fx\end{array}\right\} : ax.xc = p:q.$

Da d, a, c, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. III. Fall 1. zurückgeführt.

Fall 3. (Fig. 108—110.)

Der Punkt x soll so gefunden werden,

a) dafs $d.cx-e^2 : ax.xb = p:q$. (Fig. 108.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.cx - e^2 : ax.xb = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.cf = e^2$, so ist $\underbrace{d.cx - d.cf}_{d.fx} : ax.xb = p:q.$

Da d, a, b, f, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 3. zurückgeführt.

b.) dafs $d.cx + e^2 : ax.xb = p : q$. (Fig. 109.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.cx + e^2 : ax.xb = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $d.cf = e^2$, so ist $\underbrace{d.cx + d.cf}_{d.fx} : ax.xb = p:q.$

Da d, f, a, b, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. IV.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 3.}\\ \text{F. 2.}\\ \text{F. 1.}\end{array}\right\} \\ \qquad\text{Dat. 2.} \\ \qquad\text{Dat. 2.}\end{array}\right\}$$

reducirt, je nachdem der Punkt f

$$\left\{\begin{array}{l} \text{zwischen b, c} \\ \text{— b, a} \\ \text{auf der Verlängerung von ba} \\ \text{in b} \\ \text{in a} \end{array}\right\}$$

liegt.

c) dafs $e^2 - d.cx : ax.xb = p : q$. (Fig. 110.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - d.cx : ax.xb = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs $d.cf = e^2$, so ist $\left.\begin{matrix} d.cf - d.cx \\ d.fx \end{matrix}\right\} : ax.xb = p:q.$

Da d, a, b, f, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. III. Fall 1. zurückgeführt.

Aufgabe V. (Fig. 111—121.)

Zwischen einem der äusseren und dem mittleren von drey auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c einen vierten Punkt x zu finden, so daſs das Verhältniſs des Unterschiedes, oder der Summe des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen jener Punkte, und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten Punkte einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 111—115.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daſs $ax.xb - e^2 : cx^2 = p : q$: (Fig. 111.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xb - e^2 : cx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ab so bestimmt, daſs $af.fb = e^2$, ab in o halbirt und $og = of$ gemacht, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xb - af.fb \\ ox^2 - oa^2 - of^2 + oa^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : cx^2 = p : q.$

Da g, f, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 1. reducirt.

b) daſs $ax.xb + e^2 : cx^2 = p : q$ (Fig. 112. 113. 114.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xb + e^2 : cx^2 = p : q.$$

Ist nun α) $e^2 < \frac{1}{4}ab^2$ (Fig. 112), so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, b so bestimmt, dafs $af.fb = e^2$, ab in o halbirt und $og = of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{c} ax.xb + af.fb \\ ox^2 - ob^2 + ob^2 - of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : cx^2 = p : q.$$

Da f, g, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 1. reducirt.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, (Fig. 113.) so ist, wenn ab in o halbirt wird $e^2 = ob^2$

folglich $ax.xb + e^2 = ax.xb + ob^2$

also auch $\left.\begin{array}{c} ax.xb + ob^2 \\ ox^2 \end{array}\right\} : cx^2 = p : q$

mithin der Fall auf B. 1. A. I. reducirt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}ab^2$ (Fig. 114), so sey der Punkt f so bestimmt, dafs, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist, $bo^2 + of^2 = e^2$. Alsdan ist $\left.\begin{array}{c} ax.xb + bo^2 \\ ox^2 \end{array}\right\} + of^2 : cx^2 = p : q.$

Da nun o, f, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 1. b, reducirt.

c) dafs $e^2 - ax.xb : cx^2 = p : q$. (Fig. 115.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax.xb : cx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fb = e^2$, ab in o halbirt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{c} af.fb - ax.xb \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : cx^2 = p : q.$$

Da f, g, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf und go=of gemacht, so ist $\left.\begin{array}{l} ax.xb-af.fb \\ ox^2-of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$

Da g, f, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fa auf B. 2. A. I. F. 1. reducirt.

b) dafs $ax.xb+e^2:cx.xd=p:q$. (Fig. 132.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xb+e^2:cx.xd=p:q.$$

Ist nun α) $e^2<\frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich zwischen a,b den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fb=e^2$, ab in o halbirt und go=of gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{l} ax.xb+af.fb \\ ox^2-of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$$

Da f, g, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fa auf B. 2. A. I. F. 1. reducirt.

Ist aber β) $e^2=\frac{1}{4}ab^2$, so ist $\left.\begin{array}{l} ax.xb+ob^2 \\ ox^2 \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$

Da o, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fa auf B. 1. A. V. F. 1. reducirt.

Ist endlich γ) $e^2>\frac{1}{4}ab^2$, so sey $e^2=ob^2+of^2$, und es ist $\left.\begin{array}{l} ax.xb+bo^2+of^2 \\ ox^2+of^2 \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$ Bestimmt man die gerade Linie h so, dafs $of^2:h^2=p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2 und 60.) und es ist

$$ox^2:cx.xd-h^2=p:q. \text{ (El. V. 5.)}$$

Da o, c, d, h, p:q gegeben sind, so ist der Fal auf B. 3. A. V. F. 1. reducirt.

c) dafs $e^2-ax.xb:cx.xd=p:q$. (Fig. 133.)

und go=of gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{l} ax.xc+af.fc \\ of^2-ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx^2=p:q.$$

Da g, b, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 2. reducirt.

c) daſs $e^2-ax.xc:bx^2=p:q$. (Fig. 118.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2-ax.xc:bx^2=p:q.$$

Ist nun α) $e^2<\frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, daſs $af.fc=e^2$, welches geschehen kann, ac in o halbirt und go=of gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{l} af.fc-ax.xc \\ ox^2-of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx^2=p:q.$$

Da f, g, b, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 1.}\\ \text{F. 3.}\\ \text{F. 2.}\end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$$

reducirt, je nachdem der Punkt b

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{zwischen} & f,c \\ \text{—} & f,g \\ \text{—} & a,g \\ \text{in } f & \\ \text{in } g & \end{array}\right\}$$

liegt.

Ist aber β) $e^2=\frac{1}{4}ac^2$, so ist, wenn ac in o halbirt wird,

$$\left.\begin{array}{l} oc^2-ax.xc \\ ox^2 \end{array}\right\} : bx^2=p:q,$$

folglich, da o, b, p:q gegeben sind, der Punkt x gegeben (B. 1. A. I.).

Ist endlich γ) $e^2>\frac{1}{4}ac^2$, so sey, wenn ac in o halbirt ist, der Punkt f so bestimmt, daſs $e^2=oc^2+of^2$, Alsdann ist $\left.\begin{matrix} oc^2+of^2-ax.xc : bx^2 \\ ox^2+of^2 : bx^2 \end{matrix}\right\} = p : q$, mithin der Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. reducirt.

Fall 3. (Fig. 119. 120. 121.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $bx.xc-e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 119.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx.xc-e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen b, c so bestimmt, dafs $bf.fc = e^2$, (welches geschehen kann, da $e^2 < \frac{1}{4}bc^2$ seyn mufs, damit $bx.xc > e^2$ werden könne), bc in o halbirt und go=of gemacht, so ist

$$\left.\begin{matrix} bx.xc-bf.fc \\ of^2-ox^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : ax^2 = p : q.$$

Da a, g, f, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 3. zurückgeführt.

Zusatz. (Simson) Sollte zwischen den Punkten b, c ein dritter x gefunden werden, so dafs

$$bx.xc-e^2 : bx^2 = p : q,$$

so würde, wenn man den Punkt f so bestimmte, dafs $bf.fc = e^2$, bc in o halbirte und go=of machte, werden $\left.\begin{matrix} bx.xc-bf.fc \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$

Da nun b, g, f, p : q gegeben sind, so wäre auch diese Aufgabe auf B. 1. A. V. F. 3. reducirt.

b) dafs $bx.xc+e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 120.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx.xc+e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von bc so bestimmt, daſs $bf.fc = e^2$, bc in o halbirt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{l} bx.xc + bf.fc \\ oc^2 - ox^2 + of^2 - oc^2 \\ fx\;.\;xg \end{array}\right\} : ax^2 = p:q.$$

Da f, g, a, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. V.} \left\{\begin{array}{l}\text{Fall 3.}\\ \text{Fall 2.}\end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem der Punkt a $\left\{\begin{array}{l} \text{in der Verlängerung von bg} \\ \text{zwischen b, g} \\ \text{in g} \end{array}\right\}$ liegt.

Zusatz. (Sims.) Soll zwischen den Punkten b, c ein dritter x gefunden werden, so daſs

$$bx.xc + e^2 : bx^2 = p:q,$$

so ist, wenn die Punkte f, o bestimmt werden, wie vorhin, und $go = of$ gemacht wird, $fx.xg : bx^2 = p:q$, folglich auch diese Aufgabe auf B. 1. A. V. F. 2. reducirt.

c) daſs $e^2 - bx.xc : ax^2 = p:q$. (Fig. 121).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - bx.xc : ax^2 = p:q.$$

Ist nun α) $e^2 < \frac{1}{4}bc^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen b, c so bestimmt, daſs $bf.fc = e^2$, welches geschehen kann, bc in o halbirt und $fo = of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{l} bf.fc - bx.xc \\ ox^2 - of^2 \\ fx\;.\;xg \end{array}\right\} : ax^2 = p:q.$$

Da a, g, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. reducirt.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}bc^2$, so ist $\left.\begin{matrix} oc^2 - bx.xc \\ ox^2 \end{matrix}\right\} : ax^2 = p:q$,

folglich, da o, a gegeben sind, der Fall auf B. 1. A. I. reducirt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}bc^2$, so sey $e^2 = oc^2 + of^2$, und es ist also $\left.\begin{matrix} oc^2 + of^2 - bx.xc \\ ox^2 + of^2 \end{matrix}\right\} : ax^2 = p:q$.

Da o, a, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. reducirt.

Aufgabe VI. (Fig. 122—130.)

Auf der Verlängerung einer geraden Linie ac, in welcher drey Punkte a, b, c, gegeben sind, einen vierten x zu finden, so daſs das Verhältniſs der Summe, oder des Unterschiedes des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e und des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten Punkte einem gegebenen Verhältnisse p:q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 122. 123. 124.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daſs $ax.xb - e^2 : cx^2 = p:q$. (Fig. 122).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xb - e^2 : cx^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daſs $af.fb = e^2$, ab in o halbirt und go=ob gemacht, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xb - af.fb \\ ox^2 - fo^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : cx^2 = p:q$.

Da g, f, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{matrix}\text{B. 1. A. VI.} \left\{\begin{matrix}\text{F. 1.}\\ \text{F. 2.}\end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.}\end{matrix}\right\}$ reducirt, je nachdem bf $\left\{\begin{matrix}<\\>\\=\end{matrix}\right\}$ bc ist.

Ist endlich c) $bf > bc$, so ist, da g, c, f, p:q gegeben sind, der Fall auf B. 1. A. VI. F. 3. zurückgeführt.

Zus. (Sims.) Sollte auf der Verlängerung einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, ein dritter Punkt x bestimmt werden, so daſs $ax.xb - e^2 : bx^2 = p : q$, so würde man den Punkt f so bestimmen, daſs $af.fb = e^2$, und also erhalten

$$\left.\begin{matrix} ax.xb - af.fb \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$$

Da nun g, b, f, p:q gegeben sind, so wäre auch diese Aufgabe auf B. 1. A. VI. F. 3. zurückgeführt.

b) daſs $ax.xb + e^2 : cx^2 = p : q$. (Fig. 123.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xb + e^2 : cx^2 = p : q.$$

Ist nun α) $e^2 < \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, b so bestimmt, daſs $af.fb = e^2$, welches geschehen kann, ab in o halbirt, und $go = of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{matrix} ax.xb + af.fb \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : cx^2 = p : q.$$

Da g, f, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 1. zurückgeführt.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, so ist $\left.\begin{array}{l} ax.xb + ob^2 \\ ox^2 \end{array}\right\} : cx^2 = p:q.$

Da o, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. I. zurückgeführt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}ab^2$, so sey $e^2 = bo^2 + of^2$, und es ist $\left.\begin{array}{l} ax.xb + ob^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{array}\right\} : cx^2 = p:q.$

Da o, c, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. zurückgeführt.

c) daſs $e^2 - ax.xb : cx^2 = p:q$. (Fig. 124).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - ax.xb : cx^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ab so bestimmt, daſs $af.fb = e^2$, ab in o halbirt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{l} af.fb - ax.xb \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : cx^2 = p:q.$$

Da g, c, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. zurückgeführt.

Fall 2. (Fig. 125. 126. 127).

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daſs $bx.xc - e^2 : ax^2 = p:q$. (Fig. 125).

Analysis.

Der Punht x sey so gefunden, daſs

$$bx.xc - e^2 : ax^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von bc so bestimmt, daſs $bf.fc = e^2$, bc in o halbirt und go=of gemacht, so ist $$\left.\begin{array}{l} bx.xc - bf.fc \\ ox^2 - of^2 \\ fx \,.\, xg \end{array}\right\} : ax^2 = p:q.$$

Da a, g, f, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$ zurückgeführt, je nachdem bg $\left\{\begin{array}{c} < \\ > \\ = \end{array}\right\}$ ba ist.

b) dafs $bx.xc + e^2 : ax^2 = p:q$. (Fig. 126).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx.xc + e^2 : ax^2 = p:q.$$

Ist nun α) $e^2 < \frac{1}{4}bc^2$, so gedenke man sich zwischen b,c den Punkt f so bestimmt, dafs $bf.fc = e^2$, bc in o halbirt, und go=of gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{l} bx.xc + bf.fc \\ ox^2 - of^2 \\ fx \,.\, xg \end{array}\right\} : ax^2 = p:q.$$

Da a, g, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. zurückgeführt.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}bc^2$, so ist $\left.\begin{array}{l} bx.xc + oc^2 \\ ox^2 \end{array}\right\} : ax^2 = p:q.$

Da o, a, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. I. zurückgeführt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}bc^2$, so sey $e^2 = oc^2 + of^2$, und es ist $\left.\begin{array}{l} bx.xc + oc^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{array}\right\} : ax^2 = p:q.$

Da a, o, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. zurückgeführt.

c) dafs $e^2 - bx.xc : ax^2 = p:q$. (Fig. 127.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - bx.xc : ax^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von bc den Punkt f so bestimmt, dafs $bf.fc = e^2$, bc in o halbirt, go=of gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{r} bf.fc - bx.xc \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : ax^2 = p:q.$$

Da f, g, a, gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. V.} \left\{\begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \end{array}\right. \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$$

zurückgeführt, je nachdem

$$og \left\{\begin{array}{c} < \\ > \\ = \end{array}\right\} oa \text{ ist.}$$

Fall 3. (Fig. 128. 129. 130.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $ax.xc - e^2 : bx^2 = p:q$. (Fig. 128.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xc - e^2 : bx^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fc = e^2$, ac in o halbirt und go=of gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{r} ax.xc - af.fc \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx^2 = p:q.$$

Da g, b, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 3. zurückgeführt.

Zusatz. (Sims.) Wenn auf der Verlängerung von ac, in welcher zwey Punkte a, c gegeben sind, ein dritter x bestimmt werden sollte, so dafs

$$ax.xc - e^2 : ax^2 = p:q,$$

so würde man nach der Bestimmung von f, o, g, wie vorhin, gleichfalls haben $fx.xg : ax^2 = p : q$, und die Aufgabe, wie den vorigen Fall, auf B. 1. A. VI F. 3. zurückführen können.

b) daſs $ax.xc + e^2 : bx^2 = p : q$ (Fig. 129.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xc + e^2 : bx^2 = p : q.$$

Ist nun α) $e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, daſs $a.fc = e^2$, ac in o halbirt und $go = of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{l} ax.xc + af.fc \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx^2 = p : q.$$

Da g, b, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI.} \left\{\begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 1.} \\ \text{F. 2.} \end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$ zurückgeführt, je nachdem $ab \left\{\begin{array}{l} > ag < a \\ \quad > af \\ < ag \\ = af \\ = ag \end{array}\right\}$ ist.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist $\left.\begin{array}{l} ax.xc + oc^2 \\ ox^2 \end{array}\right\} : bx^2 = p : q$.

also der Fall auf B. 1. A. I. zurückgeführt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey $e^2 = oc^2 + of^2$, und es ist $\left.\begin{array}{l} ax.xc + oc^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{array}\right\} : bx^2 = p : q$,

also der Fall auf B. 3. A. I. $\left\{\begin{array}{l} \text{F. 2. b.} \\ \text{F. 3. b.} \end{array}\right\}$ zurückgeführt, je nachdem $ab \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} ao$ ist.

c) daſs $e^2 - ax.xc : bx^2 = p : q$. (Fig. 130.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - ax.xc : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ac so bestimmt, daſs $af.fc = e^2$, ac in o halbirt, und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{matrix} af.fc - ax.xc \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : bx^2 = p : q.$$

Da nun g, b, f, $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 2. zurückgeführt.

Der Bücher

de sectione determinata

Viertes.

Des ROBERT SIMSON

ZWEITES BUCH

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig. 131—139.)

Zwischen den beiden mittleren von vier auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c, d, einen fünften x zu finden, so daſs der Unterschied oder die Summe des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e und des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den beiden übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse p : q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 131. 132. 133.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daſs $ax.xb-e^2:cx.xd=p:q$. (fig. 131.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xb-e^2:cx.xd=p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f auf der Verlängerung von ab so bestimmt, daſs $af.fb=e^2$, ab in o halbirt,

und go=of gemacht, so ist
$$\left.\begin{array}{r} ax.xb-af.fb \\ ox^2-of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$$

Da g, f, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. I. F. 1. reducirt.

b) daſs $ax.xb+e^2 : cx.xd=p:q$. (Fig. 132.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs
$$ax.xb+e^2 : cx.xd=p:q.$$

Ist nun α) $e^2<\frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich zwischen a,b den Punkt f so bestimmt, daſs $af.fb=e^2$, ab in o halbirt und go=of gemacht. Alsdann ist
$$\left.\begin{array}{r} ax.xb+af.fb \\ ox^2-of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$$

Da f, g, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. I. F. 1. reducirt.

Ist aber β) $e^2=\frac{1}{4}ab^2$, so ist
$$\left.\begin{array}{r} ax.xb+ob^2 \\ ox^2 \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$$

Da o, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 1. reducirt.

Ist endlich γ) $e^2>\frac{1}{4}ab^2$, so sey $e^2=ob^2+of^2$, und es ist
$$\left.\begin{array}{r} ax.xb+bo^2+of^2 \\ ox^2+of^2 \end{array}\right\} : cx.xd=p:q.$$
Bestimmt man die gerade Linie h so, daſs $of^2:h^2=p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2 und 60.) und es ist
$$ox^2 : cx.xd-h^2=p:q. \text{ (El. V. 5.)}$$

Da o, c, d, h, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. V. F. 1. reducirt.

c) daſs $e^2-ax.xb : cx.xd=p:q$. (Fig. 133.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ab den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbirt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{c} af \cdot fb - ax \cdot xb \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array}\right\} : cx \cdot xd = p : q.$$

Da f, g, c, d, $p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 2. A. II.} \left\{\begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 1.} \end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$$

reducirt, je nachdem

$$bf \left\{\begin{array}{l} < bc \\ > bc \text{ und } < bd \\ \qquad\qquad > bd \\ = bc \\ = bd \end{array}\right\} \text{ist.}$$

Fall 2. (Fig. 134. 135. 136.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 134.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, welches mufs geschehen können, damit $ax \cdot xc > e^2$ werden könne, ac in o halbirt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{c} ax \cdot xc - af \cdot fc \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array}\right\} : bx \cdot xd = p : q.$$

Da g, b, d, f, p:q gegeben sind, so ist die Aufgabe auf $\left\{\begin{array}{l}\text{Buch 2. Aufg. I.}\left\{\begin{array}{l}\text{Fall 2.}\\ \text{Fall 3.}\end{array}\right\}\\ \text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem $ab \left\{\begin{array}{c}>\\<\\=\end{array}\right\} ac$ ist.

b) daſs $ax.xc+e^2:bx.xd=p:q$. (Fig. 135.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$ax.xc+e^2:bx.xd=p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den Punkt f so bestimmt, daſs $af.fc=e^2$, ac in o halbirt und $go=of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{l} ax.xc+af.fc \\ of^2-ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx.xd=p:q.$$

Da g, b, f, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{B. 2. A. I.}\left\{\begin{array}{l}\text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\}\\ \text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem $cf \left\{\begin{array}{c}<\\>\\=\end{array}\right\} cd$ ist.

c) daſs $e^2-ax.xc:bx.xd=p:q$. (Fig. 136.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2-ax.xc:bx.xd=p:q.$$

Ist α) $e^2<\frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, daſs $af.fc=e^2$, ac in o halbirt und $go=of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{r} af.fc-ax.xc\\ ox^2-of^2\\ fx.xg \end{array}\right\} : bx.xd=p:q.$$

Da f, g, b, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{B. 2. A. II.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 3.}\\ \text{F. 2.}\\ \text{F. 1.}\end{array}\right\} \\ \qquad\text{Dat. 8.}\\ \qquad\text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem

ab $\left\{\begin{array}{l} >af\\ <af \text{ und } >ag\\ \qquad\quad <ag\\ =af\\ =ag \end{array}\right\}$ ist.

Ist aber β) $e^2=\frac{1}{4}ac^2$, so ist, wenn ac in o halbirt ist, $\left.\begin{array}{r} oc^2-ax.xc\\ ox^2 \end{array}\right\} : bx.xd=p:q.$

Da o, b, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. V.} \left\{\begin{array}{l}\text{Fall 3.}\\ \text{Fall 2.}\end{array}\right\} \\ \qquad\text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem

ab $\left\{\begin{array}{l} > ao\\ < ao\\ = ao \end{array}\right\}$ ist.

Ist endlich γ) $e^2>\frac{1}{4}ac^2$, so sey $e^2=oc^2+of^2$, wenn o der Halbirungspunkt von ac ist. Alsdann ist

$\left.\begin{array}{r} o+c^2of^2-ax.xc\\ ox_2+of_2 \end{array}\right\} : bx.xd=p:q.$ Bestimmt man die gerade Linie h so, dafs $of^2 : h^2=p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.) und es ist

$$ox^2 : bx.xd-h^2=p:q. \text{ (El. V. 5.)}$$

Da o, b, d, h, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. V. $\left\{\begin{array}{l}\text{F. 3. a.}\\ \text{F. 3. a. Zus.}\\ \text{F. 2. a.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem

ab $\left\{\begin{array}{l}> \text{ao}\\ = \text{ao}\\ < \text{ao}\end{array}\right\}$ ist.

Fall 3. (Fig. 137. 138. 139.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden

a) dafs $ax.xd - e^2 : bx.xc = p : q$. (Fig. 137.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xd - e^2 : bx.xc = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen a, d so bestimmt, dafs $af.fd = e^2$, welches mufs geschehen können, damit $ax.xd > e^2$ werden könne, ad in o halbirt, und go=of genommen, so ist $\left.\begin{array}{r}ax.xd - af.fd\\ of^2 - ox^2\\ fx.xg\end{array}\right\} : bx.xc = p:q.$

Da f, g, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{B. 2. A. I.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 3.}\\ \text{F. 2.}\end{array}\right\}\\ \text{Dat. 8.}\\ \text{Dat. 8.}\\ \text{Dat. 8.}\\ \text{B. 2. A. I.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\}\\ \text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem

$\left\{\begin{array}{l}ab>ag \text{ und } \left\{\begin{array}{l}ac<af\\ ac>af\\ ac=af\end{array}\right\}\\ ab=ag \text{ und } \left\{\begin{array}{l}ac<af\\ ac>af\end{array}\right\}\\ ab<ag \text{ und } \left\{\begin{array}{l}ac<af\\ ac>af\\ ac=af\end{array}\right\}\end{array}\right\}$ ist. Für ab=ag und af ist die Aufgabe unbestimmt, oder unmöglich.

b) dafs $ax.xd+e^2 : bx.xc=p:q$. (Fig. 138.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xd+e^2 : bx.xc=p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fd=e^2$, ad in o halbirt und $go=of$ gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{r} ax.xd+af.fd \\ of^2-ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx.xc=p:q.$$

Da g, b, c, f, $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. I. Fall 3. reducirt.

c) dafs $e^2-ax.xd:bx.xc=p:q$. (Fig. 139.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2-ax.xd:bx.xc=p:q.$$

Ist *α*) $e^2<\frac{1}{4}ad^2$, so sey der Punkt f zwischen a, d so bestimmt, dafs $af.fd=e^2$, ad in o halbirt und $go=of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{r} af.fd-ax.xd \\ ox^2-of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx.xc=p:q.$$

Da f, g, b, c, $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall

$$\text{auf}\left\{\begin{array}{l} \text{B. 2. A. II.}\left\{\begin{array}{l}\text{F. 3.}\\ \text{F. 2.}\end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{B. 2. A. II. F. 1.} \end{array}\right\} \text{reducirt, je nachdem}$$

$$ab\left\{\begin{array}{l} >af \\ <af \text{ und } > ag \\ =af \\ =ag \\ <ag \end{array}\right\} \text{ist.}$$

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}ad^2$, so ist $\left.\dfrac{od^2 - ax.xd}{ox^2}\right\} : bx.xc = p:q$.

Da o, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l}\text{Buch 1. Aufg. V.} \left\{\begin{array}{l}\text{Fall 3.}\\ \text{Fall 2.}\end{array}\right\}\\ \text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem ab $\left\{\begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array}\right\}$ ist.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}ad^2$, so sey der Punkt f so bestimmt, daſs $e^2 = od^2 + of^2$, und es ist also $\left.\dfrac{od^2 + of^2 - ax.xd}{ox^2 + of^2}\right\} : bx.xc = p:q$. Es sey die gerade Linie h so bestimmt, daſs $of^2 : h^2 = p:q$ so ist h eine gegebene gerade Linie (Dat. 2.) und man hat (El. V. 5.) $ox^2 : bx.xc - h^2 = p:q$.

Da o, b, c, h, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. V. $\left\{\begin{array}{l}\text{F. 3. a.}\\ \text{F. 2. a.}\\ \text{F. 3. a. Zus.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem ab $\left\{\begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array}\right\}$ ist.

Aufgabe II. (Fig. 140—148.)

Zwischen einem der äusseren und dem nächstliegenden mittleren von vier auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c, d, einen fünften Punkt x zu finden, so daſs das Verhältniſs des Unterschiedes oder der Summe des Quadrates einer gegebenen geraden Linie und des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse p:q gleich sey.

Fall 1. (Fig. 140. 141. 142.)

Der Punkt x soll so zwischen a, b gefunden werden,

a) dafs $ax.xd - e^2 : bx.xc = p : q$. (Fig. 140.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xd - e^2 : bx.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen a, d so bestimmt, dafs $af.fd = e^2$, welches mufs geschehen können, damit $ax.xd > e^2$ werden könne, ad in o halbirt und go=of gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{l} ax.xd - af.fd \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx.xc = p:q.$$

Da f, g, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall

$$\text{auf} \left\{\begin{array}{l} \text{B. 2. A. II.} \left\{\begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 1.} \end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\} \text{reducirt, je nachdem}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ab > af \\ ab < af \text{ und } \left\{\begin{array}{l} ac > af \\ ac < af \\ ac = af \end{array}\right\} \\ ab = af \end{array}\right\} \text{ist.}$$

b) dafs $ax.xd + e^2 : bx.xc = p : q$. (Fig. 141.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xd + e^2 : bx.xc = p : q.$$

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, daſs af. fd $= e^2$, ad in o halbirt, und go=of gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{r} af \cdot fd - ax \cdot xd \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array}\right\} : bx \cdot xc = p : q.$$

Da g, b, c, f, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 1. reducirt.

Bonn, gedruckt bei H. Bohres

cirt, je nachdem ab

$$\left\{\begin{array}{l} >af \\ <af \text{ und } >ag, \text{ aber } ac \left\{\begin{array}{l} >af \\ <af \\ =af \end{array}\right\} \\ =af \\ =ag \text{ und } ac \left\{\begin{array}{l} >af \\ <af \end{array}\right\} \\ <ag \text{ und } ac \left\{\begin{array}{l} >af \\ <af, \text{ aber } \begin{array}{r} >ag \\ <ag \\ =ag \end{array} \\ =af \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

ist. Wenn $ab=ag$ und $ac=af$, so ist die Aufgabe unmöglich oder unbestimmt.

Ist β) $e^2=\frac{1}{4}ad^2$, so ist, wenn o der Halbirungspunkt von ad ist, $\left.\begin{array}{l} od^2-ax.xd \\ ox^2 \end{array}\right\} : bx.xc=p:q$.

Da o, b, c, $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI. F. 1. oder B. 1. A. V. F. 1.} \\ \text{B. 1. A. VI.} \left\{\begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$$

reducirt, je nachdem ab

$$\left\{\begin{array}{l} >ao \\ <ao \text{ und } ac \left\{\begin{array}{l} >ao \\ <ao \\ =ao \end{array}\right\} \\ =ao \end{array}\right\}$$

ist.

Ist γ) $e_2>\frac{1}{4}ad_2$, so sey f so bestimmt, daſs

$$e_2=od^2+of^2.$$

Alsdann ist $\left.\begin{array}{l} od^2+of^2-ax.xd \\ ox^2+of_2 \end{array}\right\} : bx.xc=p:q$.

Es sey die gerade Linie h so bestimmt, dafs

$$of^2 : h^2 = p : q,$$

so ist h eine gegebene gerade Linie (Dat. 2. und 60.) und es ist $ox^2 : bx.xc - h^2 = p : q$. (El. V. 5.)

Da o, b, c, h, p:q gegeben sind, so ist der Fall

auf B. 3. A. VI. F. 1. a. oder B. 3. A. V. F. 1. a.
B. 3. A. VI. F. 3. a.
F. 2. a.
F. 3. a. Zus.
F. 1. a. Zus.

reducirt, je nachdem ab $> ao$
$< ao$ und ac $> ao$
$< ao$
$= ao$
$= ao$
ist.

Fall 2. (Fig. 143. 144. 145).

Der Punkt x soll zwischen c, d so gefunden werden,

a) dafs $ax.xc - e^2 : bx.xd = p : q$. (Fig. 143.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xc - e^2 : bx.xd = p : q.$$

Gedenkt man sich zwischen c, d den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fc = e^2$, welches mufs geschehen können, damit $ax.xc > e^2$ werden könne, ac in o halbirt und $go = of$ gemacht, so ist $ax.xc - af.fc : bx.xd = p:q$,

$ox^2 - of^2$

$fx.xg$

Da g, d, b, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 2. reducirt.

b) dafs $ax.xc + e^2 : bx.xd = p : q$. (Fig. 144.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xc + e^2 : bx.xd = p : q.$$

Ist α) $e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich zwishen a,c den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fc = e^2$, welches geschehen kann, ac in o halbirt und $go = oc$ gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{matrix} ax.xc - af.fc \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : bx.xd = p : q.$$

Da f, g, b, d, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{matrix} \text{B. 2. A. II.} \left\{\begin{matrix} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 1.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$$

reducirt, je nachdem

$$ab \left\{\begin{matrix} > af \\ < af \\ < ag \\ = af \\ = ag \end{matrix}\right\} \text{ist.}$$

Ist β) $e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist, wenn ac in o halbirt ist,

$$\left.\begin{matrix} ax.xc + oc^2 \\ ox^2 \end{matrix}\right\} : bx.xd = p : q.$$

Da o, b, d, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{matrix} \text{Buch 1, Aufg. V.} \left\{\begin{matrix} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$$

reducirt, je nachdem

$$ab \left\{\begin{matrix} > ao \\ < ao \\ = ao \end{matrix}\right\} \text{ist.}$$

Ist γ) $e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey, wenn o der Halbirungspunkt von ac ist, der Punkt f so bestimmt, dafs

$$e^2 = oc^2 + of^2.$$

Und es ist

$$\left.\begin{matrix} ax.xc + oc^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{matrix}\right\} : bx.xd = p : q.$$

Es sey

die gerade Linie h so bestimmt, dafs $ob^2 : h^2 = p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.) und es ist $ox^2 : bx.xd - h^2 = p:q$ (El. V. 5.).

Da o, b, d, h, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. V. $\left\{\begin{matrix} \text{F. 1. a.} \\ \text{F. 2. a.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \end{matrix}\right\}$ reducirt, je nachdem ab $\left\{\begin{matrix} > ao \\ < ao \\ = ao \end{matrix}\right\}$ ist.

c) dafs $e^2 - ax.xc : bx.xd = p:q$. (Fig. 145.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax.xc : bx.xd = p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fc = e^2$, ac in o halbirt, go=of gemacht, so ist $\underbrace{af.fc - ax.xc}_{\underbrace{of^2 - ox^2}_{fx.xg}} : bx.xd = p:q$.

Da f, g, b, d, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{matrix} \text{Buch 2. Aufg. I.} \left\{\begin{matrix} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$ reducirt, je nachdem cf $\left\{\begin{matrix} > cd \\ < cd \\ = cd \end{matrix}\right\}$ ist.

Fall 3. (Fig. 146. 147. 148.)

Der Punkt x soll zwischen c, d gesucht werden,

a) dafs $ax.xb - e^2 : cx.xd = p:q$. (Fig. 146.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xb - e^2 : cx.xd = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ab so bestimmt, dafs $af.fb = e^2$, ab in o halbirt und go=of gemacht, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xb - af.fb \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : cx.xd = p:q.$

Da f, g, c, d, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{matrix} \text{B. 2. A. II.} \left\{\begin{matrix} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$ reducirt, je nachdem

bf $\left\{\begin{matrix} > bc \\ < c \\ = bc \end{matrix}\right\}$ ist.

b) dafs $ax.xb + e^2 : cx.xd = p:q$. (Fig. 147.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xb + e^2 : cx.xd = p:q.$$

Ist nun α) $e^2 < \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich zwischen a, b den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fb = e^2$, welches geschehen kann, ab in o halbirt, und go=of gemacht, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xb + af.fb \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : cx.xd = p:q.$

Da g, f, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 3. reducirt.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, so ist, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist, $\left.\begin{matrix} ax.xb + ob^2 \\ ox^2 \end{matrix}\right\} : cx.xd = p:q.$

Da o, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 3. reducirt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}ab^2$, so sey $e^2 = ob^2 + of^2$, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist. Alsdann ist

$\left.\begin{matrix} ax.xb + ob^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{matrix}\right\} : cx.xd = p:q.$ Es sey die

Da g, f, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. III. F. 1. reducirt.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xb + ob^2 \\ ox^2 \end{matrix}\right\} : cx.xd = p:q$, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist.

Da o, c, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. reducirt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich den Punkt f so bestimmt, daſs, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist, $e^2 = bo^2 + of^2$. Alsdann ist

$\left.\begin{matrix} ax.xb + bo^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{matrix}\right\} : cx.xd = p:q$. Es sey die gerade Linie h so bestimmt, daſs $of^2 : h^2 = p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2 und 60.) und es ist

$$ox^2 : cx.xd - h^2 = p:q. \text{ (El. V. 5.)}$$

Da o, c, d, h, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. VI. F. 2. reducirt.

c) daſs $e^2 - ax.xb : cx.xd = p:q$. (Fig. 151.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daſs

$$e^2 - ax.xb : cx.xd = p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, daſs $af.fb = e^2$, welches muſs geschehen können, ab in o halbirt und go=of gemacht, so ist $\left.\begin{matrix} af.fb - ax.xb \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : cx.xd = p:q$.

Da g, c, d, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 1. reducirt.

Fall 2. (Fig. 152. 153. 154).

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daſs $ax.xc - e^2 : bx.xd = p:q$. (Fig. 152).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dass

$$ax.xc - e^2 : bx.xd = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den Punkt f so bestimmt, dass $af.fc = e^2$, ac in o halbirt und go=of gemacht, so ist $ax.xc - af.fc \left.\right\} : bx.xd = p:q$.

$$\left.\begin{array}{c} ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{array}\right\}$$

Da f, g, b, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{Buch 2. Aufg. II.} \left\{\begin{array}{l}\text{Fall 3.}\\ \text{Fall 2.}\end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem cf $\left\{\begin{array}{c} > \\ < \\ = \end{array}\right\}$ cd ist.

b) dass $ax.xc + e^2 : bx.xd = p : q$. (Fig. 153.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dass

$$ax.xc + e^2 : bx.xd = p:q.$$

Ist α) $e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f so bestimmt, dass $af.fc = e^2$, ac in o halbirt und go=of gemacht. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{l} ax.xc + af.fc \\ \quad ox^2 - of^2 \\ \quad fx.xg \end{array}\right\} : bx.xd = p : q.$$

Da f, g, b, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{array}{l} \text{B. 2. A. III.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 1.}\\ \text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{array}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.}\end{array}\right\}$ reducirt, je nachdem ab $\left\{\begin{matrix} > af \\ < af \text{ und } \left\{\begin{matrix} > ag \\ < ag \\ = ag \end{matrix}\right\} \\ = af \end{matrix}\right\}$ ist.

Ist β) $e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xc + oc^2 \\ ox^2 \end{matrix}\right\} : bx.xd = p:q$, wenn o der Halbirungspunkt von ac ist.

Da o, b, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{\begin{matrix} \text{Buch 1. Aufg. VI.} \left\{\begin{matrix} \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 3.} \end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$ reducirt, je nachdem ab $\left\{\begin{matrix} > ao \\ < ao \\ = ao \end{matrix}\right\}$ ist.

Ist γ) $e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey, wenn o der Halbirungspunkt von ac ist, der Punkt f so bestimmt, daſs

$$e^2 = oc^2 + of^2.$$

Alsdann ist $\left.\begin{matrix} ax.xc + oc^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{matrix}\right\} : bx.xd = p:q$. Die gerade Linie h sey so bestimmt, daſs $of^2 : h^2 = p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.), und (El. V. 5.) $ox^2 : bx.xd - h^2 = p:q$.

Da o, b, d, h, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. VI. $\left\{\begin{matrix} \text{F. 2. a.} \\ \text{F. 3. a.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \end{matrix}\right\}$ reducirt, je nachdem ab $\left\{\begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix}\right\}$ ao ist.

ε) daſs $e^2 - ax.xc : bx.xd = p:q$. (Fig. 154.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax.xc : bx.xd = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ad so bestimmt, dafs af.fc = e^2, welches mufs geschehen können, ac in o halbirt und go = of gemacht, so ist

$$\left.\begin{matrix} af.fc - ax.xc \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : bx.xd = p:q.$$

Da g, b, d, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. Fall 3. reducirt.

Fall 3. (Fig. 155. 156. 157.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $ax.xd - e^2 : bx.xc = p:q$. (fig. 155.)

Analysis.

Der Punkt x sey so bestimmt, dafs

$$ax.xd - e^2 : bx.xc = p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, dafs af.fd = e^2, ad in o halbirt, und go = of gemacht, so ist

$$\left.\begin{matrix} ax.xd - af.fd \\ ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : bx.xc = p:q.$$

Da g, b, c, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. III. F. 3. reducirt.

b) dafs $ax.xd + e^2 : bx.xc = p:q$. (Fig. 156.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xd + e^2 : bx.xc = p:q.$$

Ist α) $e^2 < \frac{1}{4}ad^2$, so gedenke man sich zwischen a, d den Punkt f so bestimmt, dafs af.fd = e^2, welches geschehen kann, ad in o halbirt und go = of gemacht, so ist $\left.\begin{matrix} ax.xd+af.fd \\ ox^2-of^2 \\ fx.xg \end{matrix}\right\} : bx.xc=p:q.$

Da f, g, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{matrix} \text{B. 2. A. III.} \left\{\begin{matrix}\text{F. 1.}\\ \text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{B. 2. A. III.} \left\{\begin{matrix}\text{F. 3.}\\ \text{F. 2.}\\ \text{F. 1.}\end{matrix}\right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{matrix}\right\}$$

reducirt, je nachdem

$$ab \left\{\begin{matrix} >af \\ <af, \text{ aber } \left\{\begin{matrix} >ag \text{ und } ac \left\{\begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix}\right\} af \\ <ag \text{ und } ac >ag, \text{ aber} \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} af \\ <ag \\ =ag \\ =af \\ =ag \text{ und } ac \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} af \end{matrix}\right\} \\ =af \end{matrix}\right\} \text{ ist.}$$

Wenn ab=ag und zugleich ac=af, so ist die Aufgabe unbestimmt, oder unmöglich.

Ist β) $e^2=\frac{1}{4}ad^2$, so ist, wenn o der Halbirungspunkt von ad ist, $\left.\begin{matrix} ax.xd+od^2 \\ ox^2 \end{matrix}\right\} : bx.xc=p:q.$

Da o, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 2.}\\ \text{F. 3.}\\ \text{F. 1.}\end{array}\right\} \\ \qquad \text{Dat. 8.} \\ \qquad \text{Dat. 8.} \end{array}\right\}$$

reducirt, je nachdem ab

$$\left\{\begin{array}{l} >ao \\ <ao \text{ und ac} \left\{\begin{array}{l} >ao \\ <ao \\ =ao \end{array}\right\} \\ =ao \end{array}\right\}$$

ist.

Ist γ) $b^2 > \frac{1}{4} ad^2$, so sey, wenn o der Halbirungspunkt von ad ist, $e^2 = od^2 + of^2$. Alsdann ist

$$\left.\begin{array}{l} ax.xd + od^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{array}\right\} : bx.xc = p : q.$$

Die gerade Linie h sey so bestimmt, daſs $of^2 : h^2 = p : q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.), und (El. V. 5.) $ox^2 : bx.xc - h^2 = p : q$.

Da o, b, c, h, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{B. 3. A. VI.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 2. a.}\\ \text{F. 3. a.}\\ \text{F. 1. a.}\end{array}\right\} \\ \text{B. 3. A. VI.} \left\{\begin{array}{l}\text{F. 1. a. Zus.}\\ \text{F. 3. a. Zus.}\end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

reducirt, je nachdem ab

$$\left\{\begin{array}{l} >ao \\ <ao \text{ und ac} \left\{\begin{array}{l} >ao \\ =ao \\ <ao \end{array}\right\} \\ =ao \end{array}\right\}$$

ist.

c) daſs $e^2 - ax.xd : bx.xc = p : q$. (Fig. 157.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dass

$$e^2 - ax.xd : bx.xc = p : q.$$

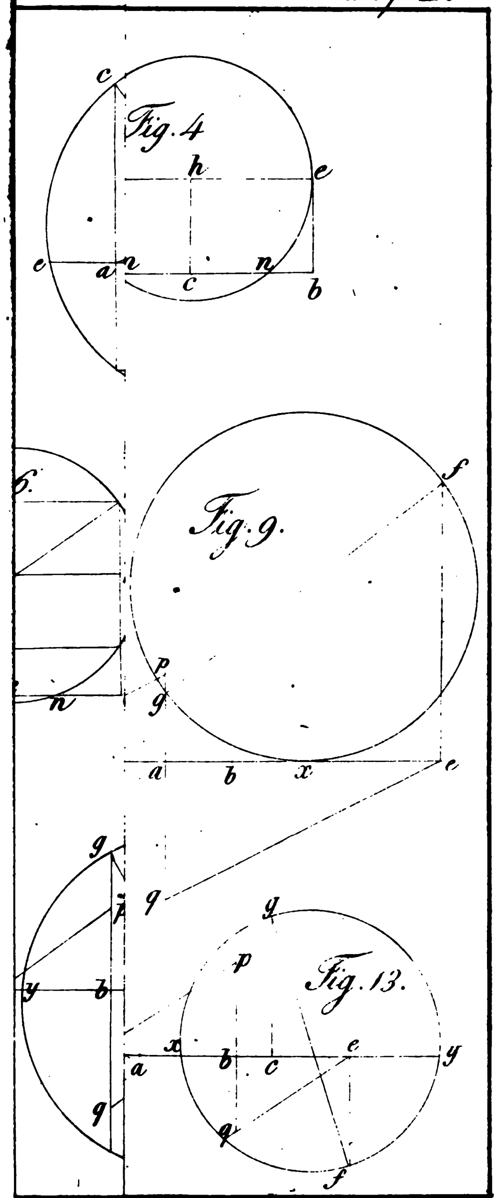
Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, dass $af.fd = e^2$, ad in o halbirt, und go=of gemacht, so ist

$$\left.\begin{array}{r} af.fd - ax.xd \\ of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{array}\right\} : bx.xc = p : q.$$

Da g, b, c, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 1. reducirt.

Bonn, gedruckt bei H. Bohres

Taf. I.



…druckerey von Rudolph Schlicht in Mannheim.

Taf. II.

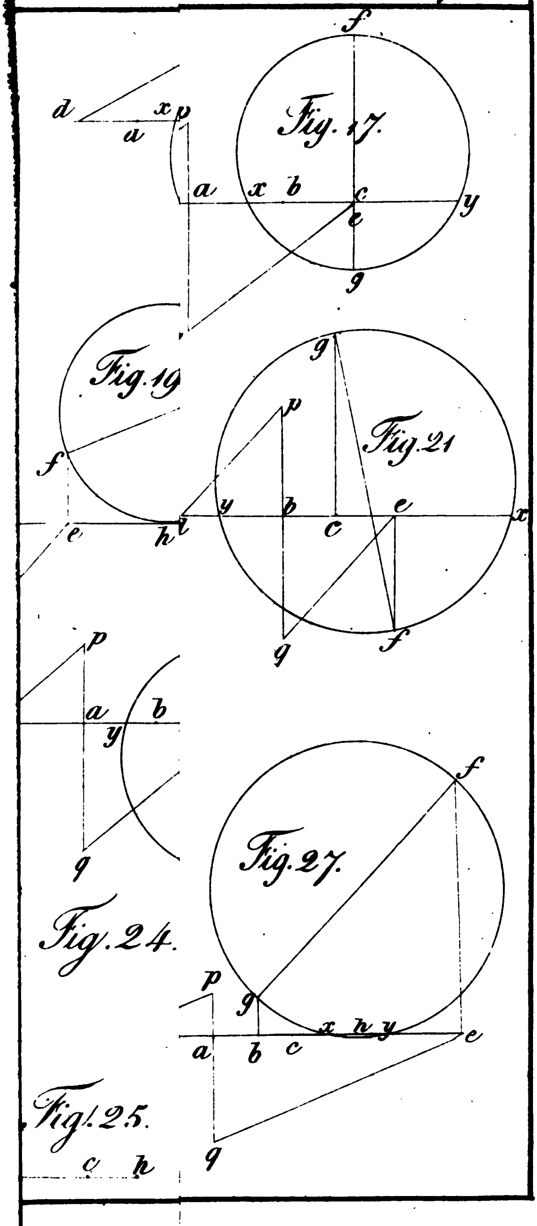
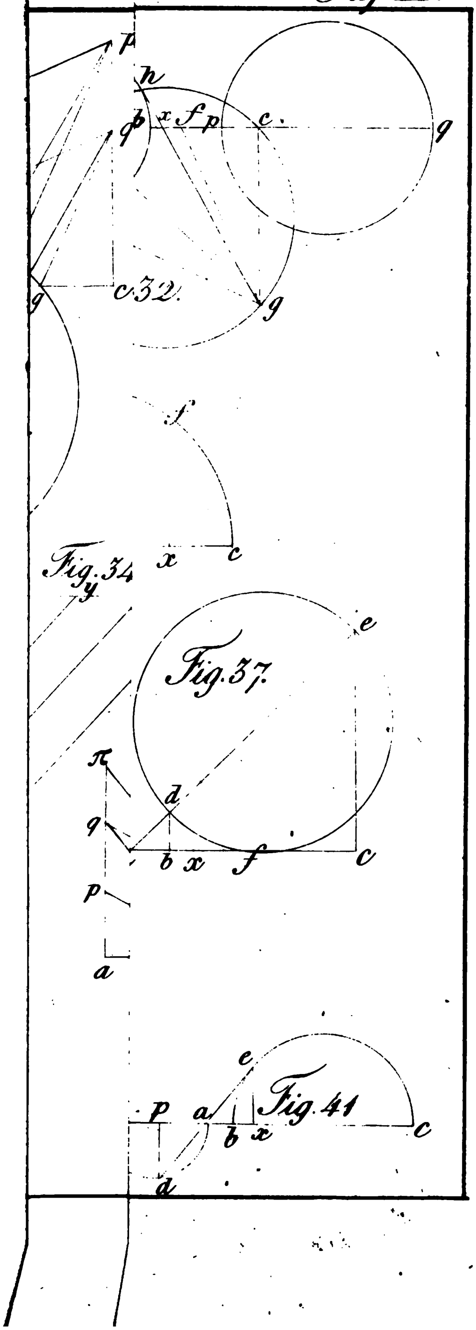


Fig. 17.
Fig. 19
Fig. 21
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 27.
d a x p a x b c y e f g
f e h i y b c e x p g f q
p a b y q
p g x h y a b c e q
c h

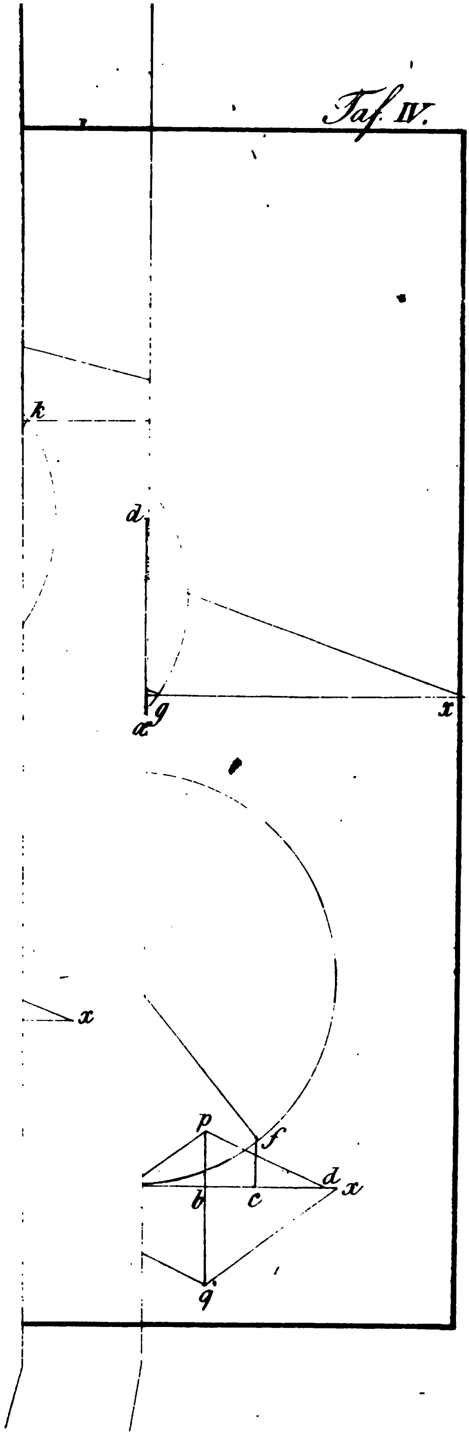
[illegible]

[illegible]

Taf III.



Taf. IV.



Taf. V.

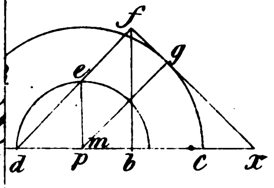
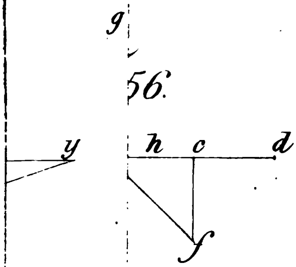


Fig. 5



56.

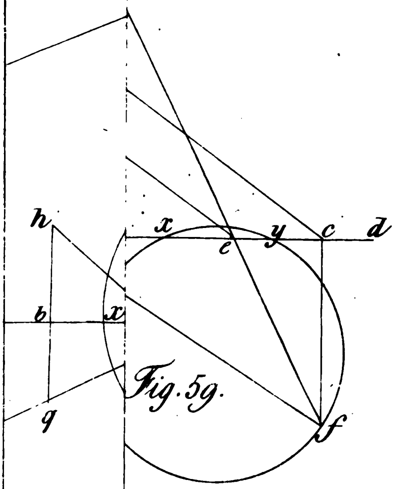


Fig. 59.

Taf VI.

Fig. 62.

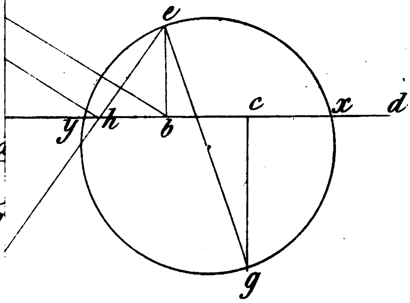
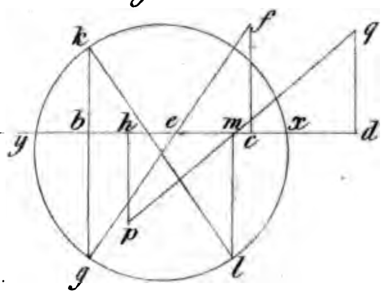
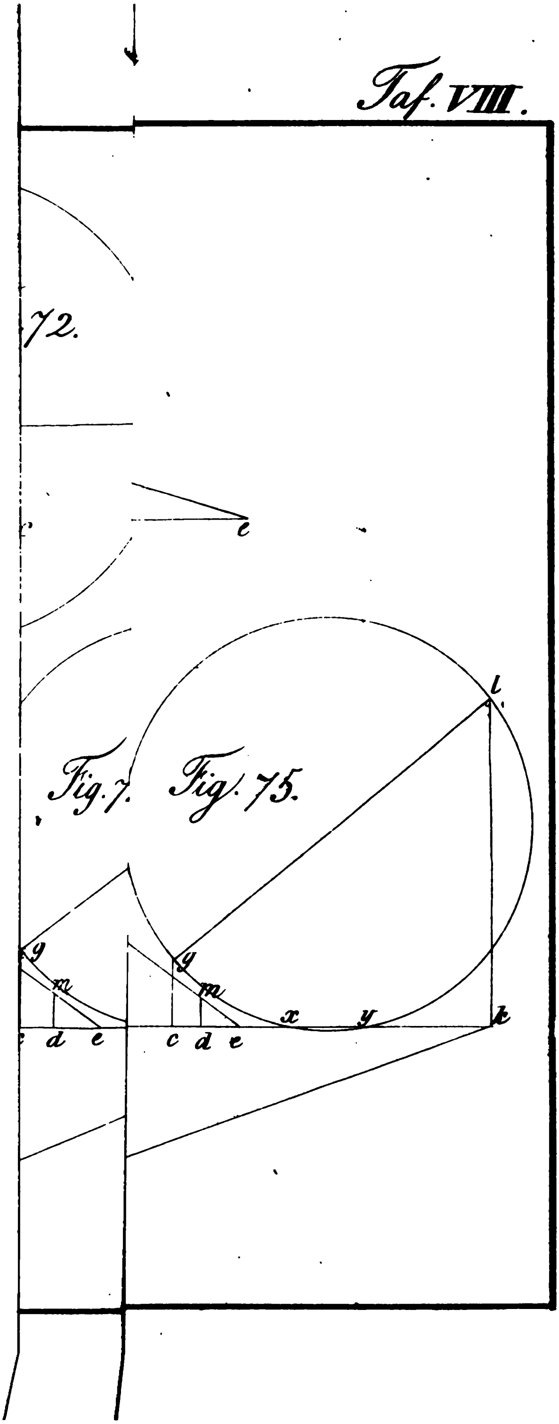


Fig. 65.



Taf. VIII.



Taf. VII.

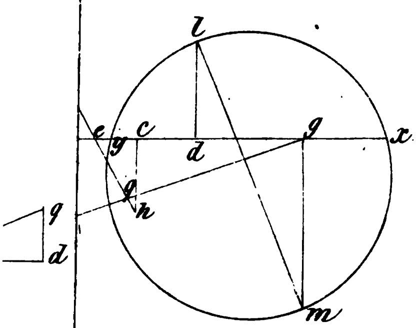
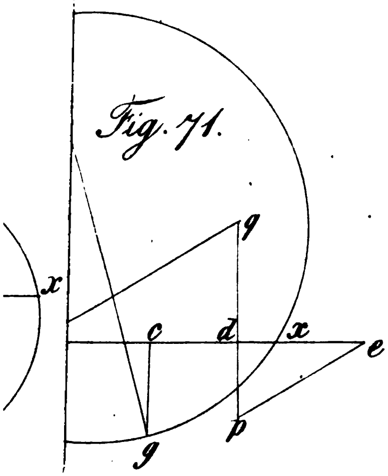


Fig. 71.



o

d

c

c d

c x

x d

x

d x

x